# Une introduction à la symétrie chirale

M. Knecht

# UNE INTRODUCTION À LA SYMÉTRIE CHIRALE

Marc KNECHT

*Centre de Physique Théorique*
*CNRS-Luminy, Case 907*
*F-13288 Marseille Cedex 9, France*

RÉSUMÉ : Ces notes de cours se proposent de fournir une introduction aux idées et aux concepts de la symétrie chirale et de sa brisure spontanée dans le cadre de la chromodynamique quantique comme théorie fondamentale des interactions fortes. Les symétries globales du lagrangien de QCD et les courants de Nœther associés sont discutés en détail. Après une discussion des identités de Ward qui en découlent pour les fonctions de Green de QCD, les aspects théoriques liés à la brisure spontanée de la symétrie chirale sont examinés. Les déviations à la relation de Goldberger-Treiman et une discussion de leur importance fournissent une illustration phénoménologique.

ABSTRACT : These lecture notes are meant to provide an introduction to the ideas and concepts of chiral symmetry and spontaneous chiral symmetry breaking within the framework of QCD viewed as the fundamental theory of strong interactions. The symmetries of the QCD lagrangian and the properties of the associated Nœther currents are discussed in detail. After the treatment of the corresponding Ward identities for QCD Green's functions, the theoretical issues related to the spontaneous breaking of chiral symmetry in QCD are addressed. Finally, deviations from the Goldberger-Treiman relation are used as a phenomenological illustration.

# 1 Introduction

L'objet de ce cours est l'étude de certains aspects des interactions fortes dans le domaine des basses énergies, c'est-à-dire lorsque les énergies typiques $E$ mises en jeu sont petites par rapport à une échelle hadronique caractéristique $\Lambda_H$ de l'ordre de 1 GeV. Le cadre de notre étude est fourni par la Chromodynamique Quantique (QCD), une théorie des champs quantique et relativiste qui décrit les interactions fortes en termes de degrés de liberté fondamentaux que sont les quarks et les gluons. Dans le domaine cinématique auquel nous nous intéressons, ceux-ci interagissent fortement et sont confinés à l'intérieur des hadrons. Il n'est donc pas possible de se contenter du cadre perturbatif habituel, c'est-à-dire un développement en puissances de $\alpha_s$, la constante de couplage des interactions fortes. Bien au contraire, un recours à des méthodes non-perturbatives est inévitable. Une possibilité consiste à discrétiser le lagrangien de QCD pour le mettre sur un réseau fini. Dans cette théorie tronquée à un nombre fini de degrés de liberté, les masses, les constantes de désintégration et autres éléments de matrice hadroniques peuvent, en principe, être calculés par une moyenne sur des configurations gluoniques et fermioniques générées numériquement par un ordinateur. Cette approche, ainsi que les difficultés liées, par exemple, à la nécessité de prendre la limite du continu (maille du réseau tendant vers zéro) et du volume (taille du réseau) infini, sont discutées dans le cours donné par P. Guichon à cette école. Les méthodes dont il sera question dans ce cours sont à la base de ce qui est appelé *la théorie des perturbations chirales*. Elles reposent sur une exploitation systématique de certaines propriétés de symétrie de la QCD, qui seront décrites dans la section 2, combinées avec les principes généraux de la théorie des champs et de la théorie de la matrice S : invariance de Lorentz, causalité, analyticité, unitarité et croisement. La théorie des perturbations chirales puise en fait ses origines dans les techniques dites d'*algèbre des courants* [1, 2, 3] développées dès le début des années soixante, bien avant l'avènement de QCD [4] en 1973. Les courants dont il est question dans ce contexte sont les parties hadroniques des courants vectoriels et axiaux. Ceux-ci sont sondés dans les désintégrations faibles des mésons et des baryons dans le cadre du Modèle Standard, ou de son approximation à basse énergie, la théorie de Fermi [5].

Ces méthodes procèdent également de certaines propriétés du spectre hadronique et que nous rappelons brièvement.

- L'étude du spectre des mésons et des baryons montre que ceux-ci s'organisent en multiplets quasi-dégénérés. Ce sont d'abord les multiplets d'isospin, doublets $(n,p)$ ou $(\Xi^-,\Xi^0)$, triplets $(\pi^-,\pi^0,\pi^+)$, $(\rho^-,\rho^0,\rho^+)$ ou $(\Sigma^-,\Sigma^0,\Sigma^+)$, quadruplets $(\Delta^-, \Delta^0, \Delta^+, \Delta^{++})$, etc. Cette symétrie d'isospin est presque parfaite, les écarts des masses par rapport à la masse moyenne à l'intérieur d'un même multiplet sont typiquement de l'ordre de 5% en valeur relative. A leur tour, ces multiplets d'isospin s'organisent à l'intérieur de structures plus vastes, des octets, comme $(\pi, K, \eta)$, $(\rho, K^*, \omega)$ ou $(N, \Sigma, \Xi, \Lambda)$, des décuplets, etc. Gell-Mann et Ne'eman [6] proposèrent d'attribuer ces régularités du spectre à l'existence d'une symétrie $SU(3)_V$, qui possède précisément des représentations irréductibles de dimensions 8, 10, etc. Les générateurs de cette symétrie sont identifiés aux mêmes courants vectoriels qui décrivent les désintégrations faibles des hadrons. Cette symétrie de "l'Octuple Voie" (*Eightfold Way*) [7] de Gell-Mann et Ne'eman est moins exacte que la symétrie d'isospin : les écarts de masse à l'intérieur des multiplets sont typiquement de l'ordre de 10 à 30%.

- Le second aspect marquant du spectre hadronique concerne "l'insoutenable légèreté du pion" : alors que tous les états mentionnés à l'instant (sauf les mésons $K$ et $\eta$) possèdent des masses qui sont typiquement de l'ordre d'une échelle caractéristique $\Lambda_H \sim 1$ GeV, le pion est lui beaucoup plus léger, $M_\pi \sim 140$ MeV. Une explication "naturelle" de cette situation a été proposée par Nambu dès 1960 [8] : les interactions fortes seraient en fait invariantes sous une symétrie approchée $SU(2) \times SU(2)$, engendrée par les courants vectoriels d'isospin et leurs partenaires axiaux. La *brisure spontanée* de cette symétrie produit une particule légère, le pion, dont la masse serait strictement nulle dans un monde où cette symétrie $SU(2) \times SU(2)$ serait exacte. Cette approche permet également de rendre compte naturellement d'une relation entre la constante de désintégration du pion et la constante de couplage pion-nucléon obtenue deux années auparavant par Goldberger et Treiman [9], et sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir.

La combinaison des propositions de Gell-Mann–Ne'eman et de Nambu mène donc à supposer qu'il existe un groupe de symétrie approché $SU(3)_L \times SU(3)_R$ [1] sous lequel les interactions fortes sont invariantes dans une certaine limite, mais dont seule une partie, le sous-groupe $SU(3)_V$ de Gell-Mann et Ne'eman, est visible dans le spectre. Notre tâche consistera à replacer cette analyse dans le cadre de la Chromodynamique Quantique, qui décrit les interactions fortes en termes de degrés de liberté fondamentaux, les quarks et les gluons. Au niveau du lagrangien de QCD, la symétrie $SU(3)_V$ de Gell-Mann et Ne'eman apparaît dans la limite ou les masses des saveurs les plus légères, les quarks $u$, $d$ et $s$, ont des valeurs égales. Les violations d'isospin et de $SU(3)_V$ sont produits par les différences

[1] La signification des indices $L$="left" et $R$="right" sera expliquée plus loin.

des masses des quarks, $m_d - m_u$ et $m_s - (m_u + m_d)/2$. L'observation, dans le spectre hadronique, des traces de ces symétries quasi-exactes ne s'explique que si ces différences de masses de quarks sont petites par rapport à l'échelle $\Lambda_H \sim 1$ GeV. Pour retrouver la symétrie plus grande $SU(3)_L \times SU(3)_R$ requise par la suggestion de Nambu, il ne suffit pas de se placer dans l'approximation où les quarks $u$, $d$ et $s$ sont simplement dégénérés, mais il faut en plus prendre la limite de masse nulle $m_u = m_d = m_s = 0$. Dans cette limite, les mésons pseudo-scalaires $\pi$, $K$ et $\eta$ deviennent les *bosons de Goldstone* de la brisure spontanée de $SU(3)_L \times SU(3)_R$ vers le sous-groupe $SU(3)_V$ de Gell-Mann et Ne'eman. La légèreté du pion est alors une conséquence de ce que , dans le monde réel, les masses des quarks $u$, $d$ et $s$ elles-mêmes, et pas seulement leurs différences, sont petites par rapport à l'échelle caractéristique $\Lambda_H$ où sont formés les "véritables" états liés, ceux qui ne sont pas des bosons de Goldstone. Autrement dit, les effets dus aux masses $m_u$, $m_d$ et $m_s$ peuvent être traités comme des perturbations par rapport à la limite où elles seraient nulles.

Nous avons déjà évoqué le fait que certains de ces aspects des interactions fortes et du spectre hadroniques étaient étudiés avant même que la Chromodynamique Quantique ne soit introduite. Notre objectif sera de comprendre non seulement dans quelle mesure ils sont compatibles avec ce que QCD nous apprend sur la structure des interactions fortes au niveau fondamental, mais surtout, dans quelle mesure ces propriétés sont en fait des conséquences de QCD. Dans la section 2, nous étudions en détail les symétries du lagrangien de QCD dans la limite où les masses des quarks légers $u$, $d$ et $s$ sont nulles. La section 3 est consacrée aux identités de Ward, qui sont des contraintes que les symétries globales continues imposent aux fonctions de Green des courants de Noether qui leur sont associés. Nous montrons ensuite, dans la section 4, qu'en QCD la brisure spontanée de la symétrie $SU(3)_L \times SU(3)_R$ vers le groupe $SU(3)_V$ est une conséquence directe de ces identités de Ward et du confinement. La section qui suit traite des déviations aux relations de Goldberger-Treiman dans l'octet des baryons. Nous montrerons comment ces quantités sont susceptibles de nous fournir un accès expérimental direct à certains aspects non-perturbatifs de QCD, liés à la structure chirale du vide. Enfin, la dernière section offre un résumé succinct des idées essentielles développées dans ces pages.

# 2 La Chromodynamique Quantique

La Chromodynamique Quantique (QCD) [4] décrit les interactions fortes au niveau le plus fondamental, où les degrés de liberté sont constitué par les quarks et les gluons. Elle est basée sur une invariance *locale* par rapport à un groupe de jauge non-abélien $SU(3)_C$ (couleur). Les bosons de jauge (gluons) interagissent entre eux, et sont également couplés à des fermions, appelés quarks [10], qui se trouvent dans la représentation fondamentale du groupe de jauge $SU(3)_C$. Dans le cadre du Modèle Standard avec trois générations, il y a six saveurs de quarks distinctes. Le lagrangien qui décrit leurs interactions est donné par

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{gluons} + \mathcal{L}_{quarks} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} \ . \tag{2.1}$$

Les deux derniers termes, $\mathcal{L}_{GF}$ et $\mathcal{L}_{FP}$, décrivent respectivement le fixage de la jauge et le terme de Faddéev-Popov qui lui est associé. Nous ne préciserons pas davantage ces termes, et par la suite nous ne rencontrerons que des opérateurs invariants de jauge et qui ne dépendent pas des fantômes de Faddéev-Popov. De tels opérateurs constituent les *observables* de QCD. La partie de $\mathcal{L}_{QCD}$ qui décrit la dynamique des gluons est donnée par

$$\mathcal{L}_{gluons} = -\frac{1}{4} G^{\alpha}_{\mu\nu} G^{\alpha,\mu\nu} - \frac{g^2 \theta_{QCD}}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G^{\alpha}_{\mu\nu} G^{\alpha}_{\rho\sigma} \ , \tag{2.2}$$

où $g$ désigne la constante de couplage de QCD ($\alpha_s = g^2/4\pi$). Les indices $\mu$ et $\nu$ sont des indices de Lorentz [2], $\alpha$ est un indice de couleur dans la représentation adjointe du groupe de jauge $SU(3)_C$, $\alpha = 1, ..., 8$, et

$$G^{\alpha}_{\mu\nu} = \partial_\mu G^{\alpha}_{\nu} - \partial_\nu G^{\alpha}_{\mu} + g\, f^{\alpha\beta\gamma}\, G^{\beta}_{\mu} G^{\gamma}_{\nu} \ . \tag{2.3}$$

Dans la formule précédente, nous avons désigné par $f^{\alpha\beta\gamma}$ les constantes de structure du groupe de jauge $SU(3)_C$. Le second terme de (2.2), caractérisé par l'angle du vide $\theta_{QCD}$, est un terme topologique, qui ne contribue pas aux équations du mouvement, mais dont la présence conduit à des violations de $\mathcal{T}$ (opération de renversement du temps) et de $\mathcal{P}$ (opération de parité). Ainsi, ce terme induit, par exemple, un moment dipolaire électrique du neutron

$$d_n \sim 4 \times 10^{-16}\, \theta_{QCD}\ e \cdot cm \ .$$

Les limites expérimentales actuelles sur cette quantité [11],

$$|d_n| \lesssim 11 \times 10^{-26}\ e \cdot cm \ ,$$

conduisent à une valeur extrêmement petite de l'angle du vide de QCD

$$|\theta_{QCD}| \lesssim 10^{-10} \ . \tag{2.4}$$

Pour une discussion plus détaillée des aspects théoriques liés à la présence du terme topologique dans le lagrangien gluonique (2.2), voir [12]. Les aspects phénoménologiques relatifs à $\theta_{QCD}$ (violation de CP dans les interactions fortes, axion...) sont discutés dans

[2] Dans ce cours, nous utiliserons la signature $(+,-,-,-)$ pour la métrique de Lorentz.

[13]. Dans ce qui suit, on négligera les violations possibles de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{P}$ dans les interactions fortes (ce qui représente une très bonne approximation), et on posera $\theta_{QCD} = 0$. Le second terme de $\mathcal{L}_{QCD}$ contient l'interaction des quarks avec les gluons. Pour la suite du cours, il est commode de l'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{quarks} = \mathcal{L}^0_{quarks} + \mathcal{L}_{masses} \ , \tag{2.5}$$

avec

$$\mathcal{L}^0_{quarks} = \sum_{Q=c,b,t} \bar{Q}\,(i\not{D} - M_Q)\,Q + \sum_{q=u,d,s} \bar{q}i\not{D}q \ , \tag{2.6}$$

et le terme de masses des quarks légers a été écrit à part,

$$\mathcal{L}_{masses} = -m_u\bar{u}u - m_d\bar{d}d - m_s\bar{s}s \ . \tag{2.7}$$

Le couplage minimal des quarks aux gluons est contenu dans la dérivée covariante

$$\not{D} = \gamma^\mu D_\mu \ , \ \ D_\mu = \partial_\mu - ig\,G^\alpha_\mu T^\alpha \tag{2.8}$$

Les matrices $T^\alpha_{ij}$, avec $\alpha$ =1, ..., 8 désignent les générateurs de $SU(3)_C$ dans la représentation fondamentale. Elles agissent sur chaque triplet de couleur $u^i$, ..., $t^i$, où les indices $i$ et $j$ varient dans l'ensemble des couleurs ($i$, $j$ = rouge, bleu, jaune), et vérifient les relations de commutation

$$\left[T^\alpha\,,\,T^\beta\right] = if^{\alpha\beta\gamma}T^\gamma \ . \tag{2.9}$$

Les indices de couleur et les indices de Dirac des quarks n'ont pas été écrits explicitement dans les équations précédentes, et seront en général omis par la suite.

Au total, le lagrangien de la QCD dépend donc de sept paramètres libres (huit si on y inclut $\theta_{QCD}$), une constante de couplage et six masses,

$$\alpha_s(\mu) = \frac{g^2(\mu)}{4\pi} \ , M_c(\mu) \ , M_b(\mu) \ , M_t(\mu) \ , m_u(\mu) \ , m_d(\mu) \ , m_s(\mu) \ . \tag{2.10}$$

Ces quantités, qui correspondent ici aux grandeurs *renormalisées*, dépendent d'une échelle $\mu$ et d'un schéma de renormalisation. Les valeurs de ces paramètres ne sont pas fixées dans le cadre du Modèle Standard, et doivent être déduites des données expérimentales. Nous verrons par la suite que certains processus hadroniques à basse énergie permettent d'obtenir des renseignements sur les *rapports* des masses des quarks légers. Ces rapports ne dépendent pas de l'échelle $\mu$ dans des schémas de renormalisation indépendants de masse comme $\overline{MS}$.

En plus de l'invariance sous les transformations locales du groupe de jauge $SU(3)_C$, le lagrangien $\mathcal{L}_{QCD}$ est également invariant sous l'action d'un groupe de symétries *globales*

$\mathcal{G}_{global}$. Ce groupe des symétries globales $\mathcal{G}_{global}$ dépend des valeurs relatives des masses des quarks. Si, à une échelle $\mu$ donnée, elles sont toutes différentes et non nulles, $\mathcal{G}_{global}$ est donné par un produit de facteurs $U(1)$ qui correspondent à la conservation de chacune des saveurs de quarks, soit :

$$\mathcal{G}_{global} = U(1)_u \times U(1)_d \times U(1)_s \times U(1)_c \times U(1)_b \times U(1)_t \ . \tag{2.11}$$

Si deux ou plusieurs saveurs de quarks sont dégénérées, le groupe des symétries globales $\mathcal{G}_{global}$ devient plus grand. Par exemple, si $m_u(\mu) = m_d(\mu)$, on peut effectuer des transformations linéaires qui mélangent les saveurs $u$ et $d$, ce qui correspond à l'invariance sous le groupe $SU(2)_V$ des transformations d'isospin. A ces symétries continues s'ajoutent (lorsque $\theta_{QCD} = 0$) les symétries discrètes, $\mathcal{P}$ (parité), $\mathcal{T}$ (renversement du temps), et $\mathcal{C}$ (conjugaison de charge).

Dans ce cours, et pour les raisons déjà évoquées dans l'introduction, nous serons amenés à adopter le point de vue suivant : les masses des quarks $u$, $d$ et $s$ sont supposées être suffisamment petites pour pouvoir être traitées comme des perturbations. De façon plus précise, nous supposons que ces masses sont faibles comparées à la masse typique $\Lambda_H$ des états hadroniques tels que le nucléon, ou le méson rho, par exemple,

$$m_q(\Lambda_H) \ll \Lambda_H \sim M_N, M_\rho, M_\omega, \ ... \sim 1 \ GeV \quad (q = u, d, s) \ . \tag{2.12}$$

Autrement dit, $\mathcal{L}_{masses}$ defini plus haut sera considéré comme une perturbation, l'approximation d'ordre zéro étant le lagrangien de QCD dans la limite chirale,

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}^0_{QCD} + \mathcal{L}_{masses} \ , \ \ \mathcal{L}^0_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}|_{m_u=m_d=m_s=0} \ . \tag{2.13}$$

Du point de vue des symétries globales, le passage à la limite chirale représente un changement très important (les symétries locales ne sont bien évidemment pas affectées, $\mathcal{G}_{local}$ reste égal a $SU(3)_C$). En effet, le groupe des symétries globales $\mathcal{G}^0_{global}$ de $\mathcal{L}^0_{QCD}$ est beaucoup plus grand que celui de $\mathcal{L}_{QCD}$, puisque

$$\mathcal{G}^0_{global} = SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \times U(1)_c \times U(1)_b \times U(1)_t \ . \tag{2.14}$$

Cet accroissement de symétrie trouve son origine dans une particularité bien connue des fermions de masse nulle, à savoir que les projections définies à l'aide de la matrice $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ par

$$q_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)q \ , \ \ q_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)q \ , \ \ q = q_R + q_L \ , \ \ q = u, \ d, \ s \ , \tag{2.15}$$

sont découplées. Cette propriété, qui est triviale à vérifier dans le cas d'un fermion libre de masse nulle, pour lequel le lagrangien de Dirac s'écrit

$$\bar{q}(x)i\ \partial\!\!\!/ q(x) = \bar{q}_R(x)i\ \partial\!\!\!/ q_R(x) + \bar{q}_L(x)i\ \partial\!\!\!/ q(x)_L\ , \tag{2.16}$$

est à l'origine de la *symétrie chirale* en QCD. Remarquons d'abord que le lagrangien (2.16) conserve séparément le nombre de fermions correspondant à chaque projection, alors que le lagrangien d'un fermion massif, $\bar{q}(x)(i\,\partial\!\!\!/ - m)q(x)$, ne conserve que le nombre fermionique total. Ensuite, notons également que pour des fermions de masse nulle les projections (2.15) coïncident aussi avec les projections d'hélicité droite et gauche, respectivement. C'est pourquoi on parle des projections de *chiralité droite* et de *chiralité gauche*, de limite chirale et de symétrie chirale [3]. Ce découplage des projections de chiralité (ou d'hélicité) droite et gauche n'est pas affecté par la présence du champ de jauge gluonique. En effet, le lagrangien de QCD dans la limite chirale peut s'écrire sous une forme équivalente,

$$\mathcal{L}^0_{quarks} = \sum_{Q=c,b,t} \bar{Q}\,(i\partial\!\!\!/ - M_Q)\,Q + \sum_{q=u,d,s} \{\bar{q}_L i\partial\!\!\!/ q_L + \bar{q}_R i\partial\!\!\!/ q_R\}\ , \tag{2.17}$$

alors que le terme de masse crée un couplage entre les composantes de chiralités opposées,

$$\mathcal{L}_{masses} = -m_u(\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) - m_d(\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) - m_s(\bar{s}_L s_R + \bar{s}_R s_L)\ . \tag{2.18}$$

Le fait que les projections de chiralité gauche et droite mènent des existences séparées dans la limite $m_u = m_d = m_s = 0$ permet d'effectuer des transformations globales *indépendantes* sur les champs $q_L$ et $q_R$ et conduit à une symétrie plus grande que celle qui résulte de la seule dégénérescence des trois saveurs. Si on regroupe les champs $u$, $d$ et $s$ qui correspondent à une couleur donnée dans un triplet de saveur

$$\psi^i(x) = \begin{pmatrix} u^i(x) \\ d^i(x) \\ s^i(x) \end{pmatrix}\ ,\ \psi^i_R(x) = \begin{pmatrix} u^i_R(x) \\ d^i_R(x) \\ s^i_R(x) \end{pmatrix}\ ,\ \psi^i_L(x) = \begin{pmatrix} u^i_L(x) \\ d^i_L(x) \\ s^i_L(x) \end{pmatrix}\ , \tag{2.19}$$

alors le groupe $SU(3)_L \times SU(3)_R$ agit de la façon suivante :

$$\psi^i_L(x) \to V_L\psi^i_L(x)\ ,\ \psi^i_R(x) \to V_R\psi^i_R(x)\ , \tag{2.20}$$

où $V_L$ et $V_R$ sont des matrices $3 \times 3$ unitaires et unimodulaires indépendantes,

$$V_L{}^+V_L = 1 = V_L V_L{}^+\ ,\ V_R{}^+V_R = 1 = V_R V_R{}^+\ ,\ detV_L = detV_R = 1\ . \tag{2.21}$$

[3] Le mot chiral vient du grec ἡ χείρ, qui signifie "la main".

Ces matrices de $SU(3)$ peuvent encore s'écrire sous la forme

$$V_L = exp\{\frac{i}{2}\sum_{a=1}^{8} \alpha_L^a \lambda^a\} \ , \ V_R = exp\{\frac{i}{2}\sum_{a=1}^{8} \alpha_R^a \lambda^a\} \ . \tag{2.22}$$

Les coefficients $\alpha_L^a$ et $\alpha_R^a$ désignent seize paramètres réels arbitraires, et les matrices hermitiennes et de trace nulle $\lambda^a$, encore appelée matrices de Gell-Mann, sont les générateurs du groupe $SU(3)$,

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$
$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{2.23}$$
$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

Formellement, les matrices $\lambda^a/2$ coïncident avec les générateurs $T^\alpha$, mais au lieu d'agir sur les indices de couleur, elles n'agissent que sur les indices de saveur $u$, $d$ et $s$. Il importe donc de bien faire la distinction entre les divers groupes $SU(3)$ en présence : le groupe de couleur $SU(3)_C$, et les groupes de saveur $SU(3)_R$ et $SU(3)_L$. Si nous considérons la limite où seules les masses des quarks $u$ et $d$ tendent vers zéro, la symétrie chirale est réduite au groupe $SU(2)_L \times SU(2)_R$, mais le groupe des transformations de jauge reste inchangé.

Les matrices $\lambda^a$ satisfont également aux relations de commutation de $SU(3)$,

$$\left[\lambda^a \, , \, \lambda^b\right] \, = \, 2\,i\,f^{abc}\lambda^c \ , \tag{2.24}$$

et sont normalisées par $Tr(\lambda^a\lambda^b) \, = \, 2\,\delta^{ab}$. Les constantes $f^{abc}$ sont antisymétriques par rapport à une permutation quelconque de deux indices. Les relations *d'anticommutation* des matrices de Gell-Mann sont décrites par les symboles $d^{abc}$, entièrement symétriques par rapport aux permutations des indices $a$, $b$ et $c$,

$$\left\{\, \lambda^a \, , \, \lambda^b \right\} \, = \, \frac{4}{3}\,\delta^{ab} \, + \, 2\,d^{abc}\lambda^c \ . \tag{2.25}$$

Ces relations et la normalisation des matrices $\lambda^a$ permettent d'exprimer les constantes $f^{abc}$ et $d^{abc}$ sous une forme où leurs propriétés de symétrie par rapport aux permutations d'indices sont explicites.

$$f^{abc} \, = \, \frac{1}{4i}\,Tr\left(\left[\lambda^a \, , \, \lambda^b\right]\lambda^c\right) \ , \ d^{abc} \, = \, \frac{1}{4}\,Tr\left(\left\{\lambda^a \, , \, \lambda^b\right\}\lambda^c\right) \ . \tag{2.26}$$

Le groupe de symétrie du lagrangien de QCD dans la limite chirale est donc égal à $SU(3)_L \times SU(3)_R$ modulo les facteurs $U(1)$ correspondant à la conservation du nombre baryonique et à la conservation du nombre de saveur de chacun des quarks lourds, que nous n'écrirons plus explicitement dorénavant. La construction de Noether fournit les courants associés à ces symétries

$$J^a_{L,\mu} = \overline{\psi_L}\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2}\psi_L \ , \ \ J^a_{R,\mu} = \overline{\psi_R}\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2}\psi_R \ . \tag{2.27}$$

Ces courants satisfont à des lois de conservation

$$\partial^\mu J^a_{L,\mu} = 0 \ , \ \ \partial^\mu J^a_{R,\mu} = 0 \ . \tag{2.28}$$

Le courant vectoriel $V_\mu$ de la symétrie $U(1)_V$ qui correspond à la conservation du nombre baryonique s'écrit

$$V_\mu \ = \ \overline{\psi}\gamma_\mu\psi \ = \ \bar{u}\gamma_\mu u + \bar{d}\gamma_\mu d + \bar{s}\gamma_\mu s \ . \tag{2.29}$$

Notons au passage qu'au niveau *classique* le lagrangien $\mathcal{L}^0_{QCD}$ est également invariant sous une symétrie axiale abélienne $U(1)_A$ qui agit en multipliant les projections $\psi_R$ et $\psi_L$ par des phases globales opposées. Le courant de Noether qui correspond à cette symétrie est donné par

$$A_\mu \ = \ \bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u + \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d + \bar{s}\gamma_\mu\gamma_5 s \ . \tag{2.30}$$

Bien que conservé au niveau classique, ce courant ne l'est plus dans la théorie quantique, où sa divergence, au lieu d'être nulle, devient (pour trois saveurs de masse nulle)

$$\partial^\mu A_\mu \ = \ \frac{3g^2}{32\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G^\alpha_{\mu\nu}G^\alpha_{\rho\sigma} \ . \tag{2.31}$$

A la place des courants "gauches" $J^a_{L,\mu}$ et "droits" $J^a_{R,\mu}$, on introduit également les courants vectoriels et axiaux

$$V^a_\mu \equiv J^a_{R,\mu} + J^a_{L,\mu} = \overline{\psi}\gamma_\mu\frac{\lambda^a}{2}\psi \ , \ \ A^a_\mu \equiv J^a_{R,\mu} - J^a_{L,\mu} = \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\psi \ , \ \ a, b \ = \ 1, \ldots, 8 \ , \tag{2.32}$$

qui, bien évidemment, sont également conservés

$$\partial^\mu V^a_\mu = 0 \ , \ \ \partial^\mu A^a_\mu = 0 \ . \tag{2.33}$$

Les charges associées à ces courants

$$Q^a_R(t) = \int_{x^0=t} d^3\vec{x}\ J^a_{R,0}(x^0,\vec{x}) \ , \ \ Q^a_L(t) = \int_{x^0=t} d^3\vec{x}\ J^a_{L,0}(x^0,\vec{x}) \ , \tag{2.34}$$

sont indépendantes du temps

$$\frac{d}{dt}Q_R^a(t) = 0 \ , \ \frac{d}{dt}Q_L^a(t) = 0 \ . \tag{2.35}$$

De plus, elles satisfont aux relations de commutation de l'algèbre de $SU(3)_L \times SU(3)_R$

$$\begin{aligned} [Q_L^a \, , \, Q_L^b] &= i f^{abc} Q_L^c \\ [Q_R^a \, , \, Q_R^b] &= i f^{abc} Q_R^c \\ [Q_R^a \, , \, Q_L^b] &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2.36}$$

Ces charges sont les *générateurs* des transformations de $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Ainsi, leur action sur les champs de quarks $u$, $d$ et $s$ est donnée, en conformité avec (2.20), par

$$[Q_L^a \, , \, \psi_L^i] = -\frac{\lambda^a}{2}\psi_L^i \ , \ [Q_R^a \, , \, \psi_R^i] = -\frac{\lambda^a}{2}\psi_R^i \ , \ [Q_L^a \, , \, \psi_R^i] = 0 = [Q_R^a \, , \, \psi_L^i] \ . \tag{2.37}$$

Quant aux courants eux-mêmes, ils se transforment de la manière suivante,

$$\begin{aligned} &[Q_L^a \, , \, J_L^b(x)] = i f^{abc} J_L^c(x) \ , \ [Q_R^a \, , \, J_L^b(x)] = 0 \\ &[Q_R^a \, , \, J_R^b(x)] = i f^{abc} J_R^c(x) \ , \ [Q_L^a \, , \, J_R^b(x)] = 0 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Notons que les lois de conservations (2.35) permettent de choisir à loisir le temps pour lequel sont définies les charges dans l'équation (2.34). Par conséquent, les commutateurs dans (2.36), (2.37) ou (2.38) peuvent être ramenés à des commutateurs à temps égaux, qui sont à leur tour fixés par les relations d'anti commutation canoniques à temps égaux des champs fermioniques.

Il est commode de disposer d'une notation qui incorpore le courant $U(1)_V$. Dans ce but, nous étendons le domaine de variation des indices $a, b$... aux valeurs 0, 1, ..., 8. La matrice $\lambda^0$ sera définie par $\lambda^0 = \sqrt{2/3} \cdot 1$, où 1 est la matrice $3 \times 3$ unité. Les propriétés de normalisation, $Tr(\lambda^a \lambda^b) = 2\,\delta^{ab}$, et les relations (2.24) et (2.25) restent encore vraies, à condition d'étendre les définitions des symboles $f^{abc}$ et $d^{abc}$ par

$$f^{0ab} = f^{a0b} = f^{ab0} = 0 \ , \ d^{0ab} = d^{a0b} = d^{ab0} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\delta^{ab} \ , \ \ a, \, b = 0, \, 1, \, ..., 8 \ . \tag{2.39}$$

Dans le cas des charges et courants axiaux, il est entendu que les indices $a, b$... ne varient que de 1 à 8, puisque le courant axial singulet de saveur (2.30) $A_\mu$ n'est pas conservé. Le courant vectoriel singulet de saveur $V_\mu$, par contre, est à la fois conservé et invariant sous les transformations du groupe chiral $SU(3)_L \times SU(3)_R$. La charge $Q_V$ associée au nombre baryonique commute donc avec toutes les charges $Q_R^a$ et $Q_L^a$. En termes des charges vectorielles ($Q_V^a \equiv Q_R^a + Q_L^a$) et axiales ($Q_A^a \equiv Q_R^a - Q_L^a$), les relations de commutation (2.36) s'écrivent encore

$$\begin{aligned} [Q_V^a\,,\,Q_V^b] &= if^{abc}Q_V^c\;,\;\; a,b=0,...,8 \\ [Q_V^a\,,\,Q_A^b] &= if^{abc}Q_A^c\;,\;\; a=0,...,8,\; b=1,...,8 \\ [Q_A^a\,,\,Q_A^b] &= if^{abc}Q_V^c\;,\;\; a,b=1,...,8\,. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Sous cette forme, il apparaît clairement que les charges vectorielles $Q_V^a$, $a = 1, ..., 8$ forment une sous-algèbre, qui engendre le sous-groupe diagonal des transformations vectorielles $SU(3)_V$ du groupe chiral de $SU(3)_L \times SU(3)_R$, et qui n'est autre que la symétrie de "l'Octuple Voie" de Gell-Mann et Ne'eman [6, 7].

Si cette dernière symétrie est effectivement observée dans le spectre hadronique, et de ce fait, est donc la bienvenue, on pourrait penser à ce stade que nous avons peut-être un surplus de symétrie, puisque le spectre hadronique ne manifeste pas de façon évidente la présence de la symétrie chirale complète $SU(3)_L \times SU(3)_R$. En effet, l'action de la parité transforme une charge "gauche" $Q_L^a$ en une charge "droite" $Q_R^a$,

$$\mathcal{P}Q_L^a\mathcal{P} = Q_R^a\;, \tag{2.41}$$

et vice-versa. On pourrait donc conclure qu'à tout multiplet de hadrons de parité bien définie est associé un autre multiplet, de parité opposée, et *dégénéré en masse*, ce qui est loin de correspondre à la réalité expérimentale. Pour comprendre cette contradiction apparente, il convient cependant de se souvenir qu'en théorie des champs (et contrairement à ce qui se passe en *mécanique quantique*, c'est-à-dire pour les systèmes à nombre *fini* de degrés de liberté), l'existence de charges conservées ne suffit pas pour garantir que la symétrie soit visible dans le spectre. En effet, si le théorème de Coleman [14] stipule bien que "l'invariance du vide est l'invariance du monde", autrement dit, que si une charge $Q$ annihile le vide, alors elle commute avec le hamiltonien et est donc conservée,

$$Q|0> = 0 \implies \frac{dQ}{dt} \equiv [Q,H] = 0\;, \tag{2.42}$$

la réciproque n'est pas nécessairement vraie :

$$[Q,H] = 0 \not\Longrightarrow Q|0> = 0\;. \tag{2.43}$$

En théorie des champs (soit pour des systèmes avec un nombre *infini* de degrés de liberté ) on peut rencontrer deux types de situations :

$i)$ $[Q,H]=0$ et $Q|0>=0$.

Dans ce premier cas, la réciproque du théorème de Coleman est vraie. On se trouve alors dans une situation similaire à celle de la mécanique quantique. La symétrie est visible dans le spectre, qui s'organise en multiplets d'états dégénérés. On dit encore que la symétrie est réalisée selon le mode de Wigner-Weyl.

$ii)$ $[Q,H]=0$ et $Q|0>\neq 0$.

Ce second cas correspond à une symétrie *brisée spontanément* : bien que le hamiltonien soit invariant, le vide ne l'est pas, et la symétrie n'est alors pas apparente dans le spectre. On dit qu'elle est réalisée selon le mode de Nambu-Goldstone.

Dans le cadre d'une théorie des champs *relativiste*, la situation d'une symétrie brisée spontanément n'est cependant pas sans conséquence pour le spectre des états propres du hamiltonien. En effet, dans ce cas s'applique le théorème de Goldstone [15, 16]. Celui-ci nous dit que pour toute charge conservée, associée à une symétrie globale *continue*, et qui ne laisse pas le vide invariant, il apparaît, dans le spectre de la théorie, une *particule de masse nulle*, appelée boson de Goldstone, et ayant les mêmes nombres quantiques que la charge en question.

Dans la section 4 nous verrons que dans le cas de la symétrie chirale de QCD, nous nous trouvons dans la seconde situation en ce qui concerne les charges axiales, et que le vide de la QCD dans la limite chirale est caractérisé par les propriétés suivantes

$$Q_V^a|0>=0\ ,\ a=0,...,8\ ,\quad et\quad Q_A^a|0>\neq 0\ ,\ a=1,...,8\ . \tag{2.44}$$

Jusqu'ici, nous avons décrit les symétries de QCD dans la limite chirale. La présence de masses de quarks $m_u$, $m_d$ et $m_s$ non nulles constitue une *brisure explicite* de la symétrie chirale. Celle-ci n'est qu'une symétrie approchée de $\mathcal{L}_{QCD}$, approximation d'autant meilleure que les masses des quarks sont petites. Les courants vectoriels et axiaux correspondants ne sont donc que *partiellement conservés* : les relations (2.33) deviennent

$$\begin{aligned}\partial^\mu V_\mu^a &= i\overline{\psi}[\mathcal{M},\frac{\lambda^a}{2}]\psi\ ,\ a=0,...,8,\\ et&\\ \partial^\mu A_\mu^a &= \overline{\psi}\{\mathcal{M},\frac{\lambda^a}{2}\}i\gamma_5\psi\ ,\ a=1,...,8\ ,\end{aligned} \tag{2.45}$$

où $\mathcal{M}$ désigne la matrice de masse (diagonale) des quarks légers

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_d & \\ & & m_s \end{pmatrix}\ . \tag{2.46}$$

Cette brisure explicite introduit les densités scalaires et pseudo-scalaires

$$S^a = \overline{\psi}\frac{\lambda^a}{2}\psi \ , \ \ P^a = \overline{\psi}i\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\psi \ . \tag{2.47}$$

Dans la limite chirale, celles-ci possèdent également des propriétés de transformation bien définies sous l'action de $SU(3)_L \times SU(3)_R$,

$$\begin{aligned} [Q_V^a\,,\,S^b(x)] &= if^{abc}S^c(x)\ , \quad [Q_A^a\,,\,S^b(x)] = id^{abc}P^c(x) + i\sqrt{\frac{2}{3}}\delta^{ab}P^0(x) \\ [Q_V^a\,,\,P^b(x)] &= if^{abc}P^c(x)\ , \quad [Q_A^a\,,\,P^b(x)] = -id^{abc}S^c(x) - i\sqrt{\frac{2}{3}}\delta^{ab}S^0(x) \end{aligned} \tag{2.48}$$

Avant d'étudier en détail les conséquences de la symétrie chirale pour QCD et pour la physique hadronique à basse énergie, il nous faut encore mentionner deux points importants. Le premier point concerne les propriétés à courtes distances (ou ultra-violettes) des opérateurs composites (invariants de jauge) tels que les courants vectoriels et axiaux, ou les densités scalaires et pseudo-scalaires. En général, un opérateur composite $\mathcal{O}(x)$ est d'abord défini dans la théorie régularisée, en termes des champs, masses et couplages non-renormalisés,

$$\mathcal{O}^{(0)}(x) = \mathcal{O}(G_{\mu\nu}^{a(0)}(x), q^{(0)}(x), g^{(0)}, m_q^{(0)}) \ . \tag{2.49}$$

Dans la limite où le régulateur disparaît ($d \to 4$ en régularisation dimensionnelle), cette définition est affectée par des singularités ultra-violettes qui, en général, ne peuvent être totalement absorbées dans la renormalisation des champs et des paramètres du lagrangien : l'opérateur $\mathcal{O}$ renormalisé acquiert une "dimension anormale". En particulier, il dépend de l'échelle et du schéma de renormalisation, par exemple

$$\mathcal{O}^{\overline{MS}}(\mu) = Z_{\mathcal{O}}(\mu)\mathcal{O}(G_{\mu\nu}^a(x), q(x), g(\mu), m_q(\mu)) \ . \tag{2.50}$$

La particularité d'un courant conservé réside dans *l'absence de dimension anormale* : $Z_J = 1$ si $\partial^\mu J_\mu = 0$. Cette propriété trouve son origine dans les identités de Ward satisfaites par le courant. Celles-ci seront discutées dans la section suivante. Mentionnons d'ores et déjà que ces identités traduisent, en particulier, les relations de commutation entre les charges, cf. les équations (2.36) ou (2.40). Celles-ci fournissent des contraintes non linéaires sur les courants, et on peut donc comprendre aisément que les normalisations des courants $V_\mu^a$ et $A_\mu^a$ sont fixées sans ambiguïté. Soulignons néanmoins que cette non renormalisation des courants ne signifie pas que le produit de *deux ou plusieurs* courants sera exempt de singularités à courtes distances. En fait, celles-ci sont déjà présentes dans la théorie libre, et il faudra donc compter avec elles a fortiori en QCD.

Le second point concerne le devenir de ces propriétés à courtes distances des courants en présence de la brisure explicite de la symétrie chirale par les masses des quarks légers. Cette brisure est ce qu'on appelle une *brisure douce*, en ce sens que l'absence de dimension anormale reste vérifiée même pour les courants $V_\mu^a$ et $A_\mu^a$ qui ne sont que partiellement conservés. La raison "technique" réside dans le fait que, dans le cadre d'une théorie des champs lagrangienne renormalisable (en quatre dimensions) comme QCD, les identités de Ward associées à une symétrie continue explicitement brisée restent "opérationnelles" si le terme de brisure explicite dans le lagrangien est produit par un opérateur de dimension strictement inférieure à quatre [17]. Dans le cas de $\mathcal{L}_{QCD}$ la brisure explicite est causée par les opérateurs $\bar{u}u$, $\bar{d}d$ et $\bar{s}s$, de dimension égale à trois. Notons que les densités scalaires $S^a(x)$ et pseudo-scalaires $P^a(x)$ possèdent des dimensions anormales, mais que les produits $m_q S^a(x)$ et $m_q P^a(x)$ en sont exempts, puisqu'ils réalisent les divergences des courants vectoriels et axiaux, qui ne sont pas renormalisés.

Ces deux propriétés ne sont pas valables dans le cas du courant axial abélien $A_\mu$ défini en (2.30) : à cause des corrections quantiques, sa divergence n'est pas nulle même dans la limite chirale, mais elle est donnée par l'opérateur $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\nu}^\alpha G_{\rho\sigma}^\alpha$ (2.31), qui est de dimension quatre.

En résumé, les courants vectoriels et axiaux sont des observables privilégiées de QCD : ils sont invariants de jauge, leurs éléments de matrice entre des états physiques sont définis sans ambiguïté à toutes les échelles, et, bien entendu, ils traduisent directement les propriétés de symétrie globale de la QCD. Rien d'étonnant donc à ce que la suite du cours soit consacrée à l'étude des propriétés des fonctions de Green construites avec ces courants et leurs divergences, et de certaines conséquences phénoménologiques qui en découlent.

# 3 Identités de Ward de la symétrie chirale

En théorie des champs, l'existence de symétries globales *continues* se traduit par des *identités de Ward*. Celles-ci consistent en une hierarchie infinie de relations entre les fonctions de Green qui font intervenir les courants conservés ou partiellement conservés associés à ces symétries.

Dans le cas de la symétrie chirale de QCD, nous verrons d'abord comment ces identités s'obtiennent dans le cadre de "l'algèbre des courants" introduite par Gell-Mann [18, 1, 2, 3]. Puis, nous décrirons une approche fonctionnelle qui permet d'obtenir sous une forme compacte la hiérarchie complète de toutes les identités de Ward satisfaites par les fonctions de Green des courants vectoriels et axiaux de QCD et de leurs divergences.

## 3.1 Algèbre des courants

Les lois de conservation (2.33) ou de conservation partielle (2.45) des courants de Noether de la symétrie chirale $SU(3)_L \times SU(3)_R$ fournissent des relations, appelées identités de Ward, entre fonctions de Green. Pour comprendre l'origine de ces identités, considérons le cas le plus simple d'une fonction à deux points de deux courants vectoriels dans la limite chirale

$$\Pi^{ab}_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x\, e^{iq\cdot x} < 0|T\{V^a_\mu(x)V^b_\nu(0)\}|0> \ . \tag{3.1}$$

Pour des valeurs fixées des indices de saveur $a$ et $b$, cette fonction à deux points est décrite par seize fonctions $\Pi^{ab}_{\mu\nu}(q)$ qui dépendent des quatre variables $q_\mu$. L'invariance de Lorentz nous permet de réduire la description de cette fonction de Green à deux fonctions d'une seule variable, l'invariant $q^2$,

$$\Pi^{ab}_{\mu\nu}(q) = q_\mu q_\nu \Pi^{ab}_V(q^2) + \eta_{\mu\nu}\widetilde{\Pi}^{ab}_V(q^2) \ . \tag{3.2}$$

Nous allons montrer que la symétrie chirale implique une relation entre $\Pi^{ab}_V(q^2)$ et $\widetilde{\Pi}^{ab}_V(q^2)$, et donc que toute l'information sur la fonction de corrélation $< 0|T\{V^a_\mu(x)V^b_\nu(0)\}|0 >$ est contenue dans les fonctions $\Pi^{ab}_V(q^2)$. Avant toute chose, il nous appartient de définir le produit chronologique ($T$-produit) qui apparaît dans cette expression. Rappelons que, de façon générale, le $T$-produit de deux opérateurs locaux $\mathcal{O}_1(x)$ et $\mathcal{O}_2(x)$ doit, par définition, vérifier la propriété suivante

$$T\{\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\} = \begin{cases} \mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y) & si \;\; x^0 > y^0 \\ \mathcal{O}_2(y)\mathcal{O}_1(x) & si \;\; y^0 > x^0 \end{cases} \ . \tag{3.3}$$

Cette propriété ne définit pas $T\{\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\}$ de manière unique : elle laisse le possibilité de modifier le $T$-produit de deux opérateurs par une contribution localisée en $x^0 = y^0$. Nous serons amenés à faire usage de cette liberté de choix dans un instant. Pour l'heure, supposons que nous employions le $T$-produit *canonique*, défini à l'aide de la distribution $\theta(x)$ de Heaviside :

$$T_{can}\{\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\} = \theta(x^0 - y^0)\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y) + \theta(y^0 - x^0)\mathcal{O}_2(y)\mathcal{O}_1(x) \ . \tag{3.4}$$

Puisque $d\theta(x)/dx = \delta(x)$, la suite d'égalités suivante s'établit aisément :

$$iq^\mu \int d^4x\, e^{iq\cdot x} < 0|T_{can}\{V^a_\mu(x)V^b_\nu(0)\}|0> =$$

$$
\begin{aligned}
&= - \int d^4x\, e^{iq\cdot x}\, \partial^\mu_x \, < 0|T_{can}\{V^a_\mu(x)V^b_\nu(0)\}|0 > \\
&= - \int d^4x\, e^{iq\cdot x} \, < 0|T_{can}\{(\partial^\mu V^a_\mu)(x)V^b_\nu(0)\}|0 > \\
&\quad - \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \, < 0| \left[V^a_0(0,\vec{x})\,,\, V^b_\nu(0)\right] |0 > \\
&= - \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \, < 0| \left[V^a_0(0,\vec{x})\,,\, V^b_\nu(0)\right] |0 > \,,
\end{aligned}
$$

où la dernière relation résulte de la conservation du courant vectoriel. Pour extraire de cette identité le résultat qui nous intéresse, il nous faut disposer d'informations sur la valeur moyenne dans le vide du commutateur à temps égaux $\left[V^a_0(0,\vec{x})\,,\, V^b_\nu(0)\right]$. En partant des relations de commutation (2.40) ou (2.38) entre les charges vectorielles et axiales et les courants, Gell-Mann [18] avait postulé les relations de commutation à temps égaux suivantes pour les composantes temporelles des courants :

$$
\begin{aligned}
\left[V^a_0(x)\ ,\ V^b_0(y)\right]_{x^0=y^0} &= if^{abc}V^c_0(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})\ , \\
\left[A^a_0(x)\ ,\ A^b_0(y)\right]_{x^0=y^0} &= if^{abc}V^c_0(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})\ , \\
\left[V^a_0(x)\ ,\ A^b_0(y)\right]_{x^0=y^0} &= if^{abc}A^c_0(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})\ ,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

qui à priori, sont en accord avec l'invariance de Lorentz et les équations (2.40) et (2.38). L'extension naïve à des relations similaires pour les composantes spatiales des courants, par exemple,

$$
\begin{aligned}
\left[V^a_0(x)\ ,\ V^b_i(y)\right]_{x^0=y^0} &= if^{abc}V^c_i(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})\ , \\
\left[A^a_0(x)\ ,\ A^b_i(y)\right]_{x^0=y^0} &= if^{abc}V^c_i(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})\ , \\
\left[V^a_0(x)\ ,\ A^b_i(y)\right]_{x^0=y^0} &= if^{abc}A^c_i(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})\ ,
\end{aligned}
$$

est plus problématique. Bien que les relations ci-dessus reproduisent les propriétés de transformation (2.38) des courants sous l'action de $SU(3)_L \times SU(3)_L$, elles sont en conflit avec des propriétés générales de QCD (en fait, de toute théorie des champs locale), à savoir l'invariance de Lorentz et la positivité. Ce défaut des relations de commutation naïves avait été souligné par Schwinger [19], et la forme donnée ci-dessus pour les commutateurs à temps égaux des courants doit en général être modifiée par des termes supplémentaires, appelés "termes de Schwinger". Ceux-ci reflètent les singularités à courtes distances des produits d'opérateurs composites comme les courants. Les relations correctes s'écrivent

$$
\left[V^a_0(0,\vec{x})\,,\, V^b_\nu(0)\right] \;=\; if^{abc}V^c_\nu(0)\ \delta(\vec{x}) + S^{ab}_{\nu j}(0)\,\partial^j\delta(\vec{x})\ . \tag{3.6}
$$

La forme des termes de Schwinger est en partie contrainte par l'invariance de Poincaré et la nécessité de reproduire, par intégration sur la variable d'espace $\vec{x}$, les commutateurs charge-courant [4]. Naturellement, des termes semblables apparaissent également dans les commutateurs qui font intervenir les courants axiaux. Pour une discussion plus détaillée, voir [20, 1, 2, 3]. Comme le montrent les études effectuées dans divers modèles [1, 2, 3], les coefficients $S_{\mu j}^{ab}(x)$ sont loin d'être universels.

Les mêmes singularités à courtes distances des produits de courants qui sont à l'origine des termes de Schwinger se manifestent également dans le produit chronologique d'opérateurs composites : le $T$-produit canonique de deux ou de plusieurs courants n'est, en général, pas covariant sous l'action du groupe de Lorentz. Il est possible de remédier à ce défaut en usant de la possibilité de modifier la définition du produit chronologique pour les temps coïncidants [20] :

$$< 0|T_{cov}\{\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\}|0> = < 0|T_{can}\{\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\}|0> + \tau(x,y) \ , \tag{3.7}$$

où le support de la distribution $\tau(x,y)$, qui dépend des opérateurs $\mathcal{O}_1(x)$ et $\mathcal{O}_2(x)$ considérés, est restreint à $x^0 = y^0$, de façon à préserver la définition (3.3) du produit chronologique. Par contre, le seul critère de covariance ne fixe pas totalement $\tau(x,y)$ : l'addition d'une terme $\tau_0(x,y)$ covariant est toujours possible. Compte-tenu de ces modifications dans les relations de commutation et le produit chronologique des courants, l'identité de Ward précédente s'écrit

$$\begin{aligned} iq^\mu \int d^4x\, e^{iq\cdot x} &< 0|T_{cov}\{V_\mu^a(x)V_\nu^b(0)\}|0> = \\ &= iS_{\nu j}^{ab}(0)q^j + iq^\mu \int d^4x\, e^{iq\cdot x}\, \tau_{\mu\nu}^{ab}(x) \ , \end{aligned}$$

puisque l'invariance relativiste exige $< 0|V_\nu^c(0)|0> = 0$. Si la redéfinition $\tau_{\mu\nu}^{ab}(x)$ de la valeur moyenne dans le vide du $T$-produit des deux courants $V_\mu^a(x)$ et $V_\nu^b(0)$ peut être choisie de façon à ce qu'elle compense la contribution des termes de Schwinger, l'identité de Ward se ramène à sa forme "naïve",

$$iq^\mu \int d^4x\, e^{iq\cdot x} < 0|T_{cov}\{V_\mu^a(x)V_\nu^b(0)\}|0> = 0 \ , \tag{3.8}$$

qui implique le résultat annoncé, $q^2\Pi_V^{ab}(q^2) + \widetilde{\Pi}_V^{ab}(q^2) = 0$, soit

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q^2) = (q_\mu q_\nu - \eta_{\mu\nu}q^2)\, \Pi_V^{ab}(q^2) \ . \tag{3.9}$$

De la même façon, et sous la même réserve de compensation entre termes de Schwinger et contributions non covariantes au produit chronologique, on montre que la fonction de corrélation de deux courants axiaux est également transverse,

$$i \int d^4x\, e^{iq\cdot x} < 0|T_{cov}\{A_\mu^a(x)A_\nu^b(0)\}|0> = (q_\mu q_\nu - \eta_{\mu\nu}q^2)\, \Pi_A^{ab}(q^2) \ . \tag{3.10}$$

[4] On peut donc envisager des termes de Schwinger avec des dérivées de la fonction $\delta(\vec{x})$ d'ordre supérieur à un. Nous ne les avons pas écrits par souci de simplification.

S'il est possible de montrer, à partir d'arguments très généraux [20, 3], qu'il existe toujours un choix de $\tau^{ab}_{\mu\nu}(x)$ qui permette de reproduire les identités de Ward naïves pour les fonctions à deux points, ce n'est déjà plus le cas pour les fonctions à trois points. L'existence de ces contributions "anormales" aux identités de Ward a d'abord été mise en évidence par des calculs perturbatifs dans le modèle $\sigma$ linéaire [21] et en électrodynamique [22]. Si les conséquences phénoménologiques des identités de Ward anormales sont intéressantes en soi, elles montrent également qu'une approche basée uniquement sur des considérations de symétrie est déficiente, dans la mesure où elle ne contient aucune information sur les propriétés à courtes distances. L'intérêt de disposer d'une théorie sous-jacente des interactions fortes, ce qui n'était bien évidemment pas la cas à l'époque héroïque où les techniques d'algèbre des courants furent développées, réside dans la possibilité d'exercer un contrôle sur les aspects à courtes distances de la théorie, du moins dans le cadre perturbatif. En particulier, dans QCD, les contributions anormales à certaines identités de Ward peuvent être obtenues de manière exacte par un calcul perturbatif à l'ordre le plus bas, le résultat n'étant pas modifié par les corrections gluoniques. Nous ne présentons pas la démarche et le résultat général de cette analyse [23, 24, 25].

Mentionnons pour clore cette section, que dans le cas où on se trouve en présence de symétries approchées, comme la symétrie chirale de QCD dans le monde réel, avec des quarks massifs, ces identités de Ward fournissent des relations entre fonctions de Green qui découlent des relations de conservation partielle (2.45), qu'il est commode d'écrire sous la forme

$$\partial^\mu V^a_\mu(x) = D^a_V(x)\ ,\ a = 0, ..., 8\ ,$$
$$\partial^\mu A^a_\mu(x) = D^a_A(x)\ ,\ a = 1, ..., 8\ , \tag{3.11}$$

avec, cf. (2.45)

$$D^a_V(x) = f^{abc}\mathcal{M}^b S^c(x)\ ,\ D^a_A(x) = d^{abc}\mathcal{M}^b P^c(x)\ , \tag{3.12}$$

et $\mathcal{M}^a = Tr(\lambda^a\mathcal{M})$, $a = 0, ..., 8$, soit

$$\mathcal{M}^3 = (m_u - m_d)\ ,\ \mathcal{M}^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}(m_u + m_d - 2m_s)\ ,\ \mathcal{M}^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}(m_u + m_d + m_s)\ . \tag{3.13}$$

Ainsi, les deux identités de Ward précédentes deviennent

$$\begin{aligned} iq^\mu \int d^4x\, e^{iq\cdot x} &< \Omega|T_{cov}\{V^a_\mu(x)V^b_\nu(0)\}|\Omega> = \\ &= -f^{acd}\mathcal{M}^c \int d^4x\, e^{iq\cdot x} < \Omega|T_{cov}\{S^d(x)V^b_\nu(0)\}|\Omega> \\ &= -\int d^4x\, e^{iq\cdot x} < \Omega|T_{cov}\{D^a_V(x)V^b_\nu(0)\}|\Omega>\ , \end{aligned} \tag{3.14}$$

et

$$
\begin{aligned}
iq^{\mu}\int d^4x\, e^{iq\cdot x} &< \Omega|T_{cov}\{A^a_\mu(x)A^b_\nu(0)\}|\Omega> = \\
&= -d^{acd}\mathcal{M}^c\int d^4x\, e^{iq\cdot x} < \Omega|T_{cov}\{P^d(x)A^b_\nu(0)\}|\Omega>= \\
&= -\int d^4x\, e^{iq\cdot x} < \Omega|T_{cov}\{D^a_A(x)A^b_\nu(0)\}|\Omega> \ .
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Dans le cas massif, on établit ainsi une relation entre les combinaisons $q^2\Pi^{ab}_V(q^2)+\tilde{\Pi}^{ab}_V(q^2)$ et $q^2\Pi^{ab}_A(q^2)+\tilde{\Pi}^{ab}_A(q^2)$ et les fonctions qui décrivent les deux corrélateurs

$$< \Omega|T_{cov}\{V^a_\mu(x)D^b_V(0)\}|\Omega>$$

et

$$< \Omega|T_{cov}\{A^a_\mu(x)D^b_A(0)\}|\Omega> \ .$$

Les identités de Ward que satisfont ces derniers permettent alors de se ramener aux fonctions à deux points $< \Omega|T_{cov}\{D^a_V(x)D^b_V(0)\}|\Omega>$ et $< \Omega|T_{cov}\{D^a_A(x)D^b_A(0)\}|\Omega>$. Citons comme exemple la relation suivante, qui nous sera utile par la suite

$$
\begin{aligned}
iq^{\mu}\int d^4x\, e^{iq\cdot x} &< \Omega|T_{cov}\{A^a_\mu(x)P^b(0)\}|\Omega> = \\
&= id^{abc} < \Omega|S^c(0)|\Omega> - \int d^4x\, e^{iq\cdot x} < \Omega|T_{cov}\{D^a_A(x)P^b(0)\}|\Omega> \ .
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Dans ces trois dernières identités de Ward, nous avons pris soin de distinguer le vide de la théorie massive, noté $|\Omega>$, du vide de la limite chirale, désigné par $|0>$.

# 4 Le sort de la symétrie chirale en QCD

Dans ce qui précède, nous avons étudié en détail les symétries globales de QCD dans la limite chirale (section 2), et nous avons mis en place la machinerie des identités de Ward (section 3) qui représentent les contraintes imposées par ces symétries au niveau des fonctions de Green des courants et de leurs divergences. Il nous appartient maintenant d'en exploiter le contenu et d'en tirer les conclusions qui en découlent pour la structure chirale du vide de QCD et des interactions fortes à basse énergie.

## 4.1 Deux théorèmes fondamentaux

Nous avons déjà signalé que l'adéquation des symétries du lagrangien de QCD à la structure du spectre hadronique telle qu'elle est observée exige que le vide $|0>$ de QCD dans la limite chirale ne soit pas invariant sous les transformations engendrées par les charges axiales, et que la symétrie chirale $SU(3)_L \times SU(3)_R$ subisse une brisure spontanée vers le sous-groupe $SU(3)_V$ engendré par les charges vectorielles $Q_V^a$.

Il s'avère que cette propriété du vide de la QCD peut se démontrer : elle est en fait une *conséquence directe* des identités de Ward de la symétrie chirale et du confinement. Ainsi, le sort de la symétrie chirale en QCD est réglé par les deux théorèmes fondamentaux énoncés ci-dessous. Une démonstration complète de ces résultats fait appel à des concepts et des techniques qui, bien que très intéressants en soi, vont cependant au-delà des objectifs de ce cours d'introduction. Nous nous contenterons donc d'une esquisse d'esquisse de démonstration.

• **Théorème 1** [26] : En QCD, si on suppose que l'angle du vide $\theta_{QCD}$ est nul, le sous-groupe des symétries vectorielles ne peut pas être brisé spontanément.

Ce théorème nous donne donc un premier renseignement, à savoir que le vide de QCD est toujours invariant sous les symétries vectorielles, $Q_V^a\,|0> = 0$. Une situation où certaines charges *vectorielles* n'annihileraient pas le vide n'est pas permise. Ceci ne nous dit rien sur les propriétés de transformation du vide sous les symétries axiales. Par contre, certaines possibilités, comme par exemple la brisure spontanée de $SU(3)_L \times SU(3)_R$ vers $SU(2)_L \times SU(2)_R$, sont exclues. Pour arriver à ce résultat [26], il convient d'abord d'effectuer une rotation de Wick et de considérer la version euclidienne de QCD. Le cœur de la démonstration consiste à établir, pour la théorie euclidienne, une inégalité à laquelle doit satisfaire la fonction de corrélation à deux points des courants vectoriels. Cette inégalité serait violée si le vide n'était pas invariant sous l'action des transformations de $SU(3)_V$. Pour obtenir ce résultat, il est crucial de disposer d'une mesure d'intégration sur les configurations gluoniques qui soit réelle et définie positive. Ces propriétés ne sont garanties, dans la version euclidienne de la théorie, que si l'angle du vide $\theta_{QCD}$ est nul.

Il nous reste donc à montrer que la seconde propriété du vide, à savoir $Q_A^a|0> \neq 0$, est également réalisée. C'est là l'objet du :

• **Théorème 2** [27] : Si le spectre des états physiques ne contient pas d'états colorés (confinement), et si le nombre de saveurs de masse nulle est *au moins égal à 3*, alors les symétries axiales sont brisées spontanément.

La démonstration [27, 28] de ce second théorème repose sur les identités de Ward anormales, évoquées dans la section précédente, et satisfaites par certaines fonctions à trois points prises dans la limite chirale. Pour les deux fonctions à trois points (sauf mention explicite du contraire, il est entendu que dorénavant le symbole $T$ désigne un $T$-produit covariant)

$$(\Gamma_{AAA})^{abc}_{\mu\nu\rho}(q,p) = i \int d^4x\, d^4y\, e^{i(p\cdot x+q\cdot y)} < 0|T\{A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)A^c_\rho(0)\}|0>_c$$

$$(\Gamma_{VVA})^{abc}_{\mu\nu\rho}(q,p) = i\int d^4x\, d^4y\, e^{i(p\cdot x+q\cdot y)} < 0|T\{V^a_\mu(x)V^b_\nu(y)A^c_\rho(0)\}|0>_c \ , \tag{4.1}$$

ces identités de Ward anormales s'écrivent (en l'absence de termes anormaux, les seconds membres seraient identiquement nuls)

$$\begin{aligned}(p+q)^\rho\,(\Gamma_{AAA})^{abc}_{\mu\nu\rho}(q,p) &= -\frac{N_C}{24\pi^2}\,d^{abc}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho\,q^\sigma \ ,\\ (p+q)^\rho\,(\Gamma_{VVA})^{abc}_{\mu\nu\rho}(q,p) &= -\frac{N_C}{8\pi^2}\,d^{abc}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho\,q^\sigma \ ,\end{aligned} \tag{4.2}$$

où le nombre de couleurs $N_C$ est égal à trois en QCD. La fonction $(\Gamma_{VVA})^{abc}_{\mu\nu\rho}(q,p)$ satisfait de plus aux identités de Ward suivantes

$$p^\mu\,(\Gamma_{VVA})^{abc}_{\mu\nu\rho}(q,p) = q^\nu\,(\Gamma_{VVA})^{abc}_{\mu\nu\rho}(q,p) = 0 \ . \tag{4.3}$$

L'invariance sous les transformations de Lorentz et la parité nous permet de décomposer ces fonctions à trois points en termes de facteurs de forme invariants (comme nous l'avions fait pour la fonction à deux points, voir les équations (3.1) et (3.10)). Si on se restreint à des configurations [5] pour lesquelles $p^2 = q^2 = (p+q)^2 \equiv -Q^2$, on obtient

$$(\Gamma_{AAA})^{abc}_{\mu\nu\rho}(q,p) = F(Q^2)\,d^{abc}\,[\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\alpha q^\beta(p+q)_\rho + \epsilon_{\nu\rho\alpha\beta}q^\alpha(p+q)^\beta p_\mu + \epsilon_{\rho\mu\alpha\beta}(p+q)^\alpha p^\beta q_\nu\,] + \ldots \tag{4.4}$$

La première identité de Ward anormale de l'équation (4.2) donne alors la condition (il existe une contrainte similaire pour la fonction $(\Gamma_{VVA})^{abc}_{\mu\nu\rho}(q,p)$ qui provient de la seconde équation (4.2) )

$$Q^2 F(Q^2) = \frac{N_C}{24\pi^2} \ . \tag{4.5}$$

Autrement dit, l'anomalie fixe le facteur de forme $F(Q^2)$ *pour toutes les valeurs* de $Q^2$. En particulier, $F(Q^2)$ possède un pôle en $Q^2 = 0$, et le résidu de ce pôle est fixé par *les propriétés à courtes distances de QCD* ! Il est possible de montrer que ce pôle dans le facteur de forme $F(Q^2)$ implique que la fonction de Green $(\Gamma_{AAA})^{abc}_{\mu\nu\rho}$ possède une *discontinuité* en $Q^2 = 0$. La suite de l'analyse fait alors appel à deux résultats de la théorie de la matrice $S$. Le premier résultat, connu sous le nom de "règles de Landau", permet de localiser les singularités dans la région physique d'une fonction de Green. Le second résultat, les "règles de Cutkosky", permet de calculer la discontinuité d'une fonction de Green quelconque à ces singularités [29]. Dans le cas des fonctions de Green $(\Gamma_{AAA})^{abc}_{\mu\nu\rho}(p,q)$

[5] Cette restriction n'est pas du tout une nécessité, mais elle permet de simplifier les formules, et n'enlève rien à la généralité de la discussion.

et $(\Gamma_{VVA})^{abc}_{\mu\nu\rho}(q,p)$, on montre alors que les singularités exigées par les identités de Ward anormales ne peuvent être causées que par des états physiques intermédiaires de masse nulle et de *spin 0* ou de *spin 1/2*. Que ces singularités puissent être reproduites par des états intermédiaires de masse nulle de spin 1/2 n'est pas surprenant, puisque ce sont les boucles de quarks qui créent les contributions anormales aux identités de Ward (4.2). Par contre, si on suppose que la théorie confine, alors les seuls états physiques de spin 1/2 à considérer sont des baryons *qqq singulets de couleur* et de masse nulle. Si la symétrie chirale n'est pas brisée spontanément, ces baryons de masse nulle s'organisent à l'intérieur de multiplets de $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Les multiplets qui sont possibles sont contraints par les propriétés de transformation (2.37) des quarks eux-mêmes, et par la structure $qqq$ des baryons [6]. Une analyse détaillée [27, 28] montre qu'il est impossible de reproduire les singularités requises pour les fonctions à trois points avec des baryons de masse nulle et de spin 1/2. Le spectre de la théorie comporte donc nécessairement des particules de spin 0 et de masse nulle, qui couplent aux courants axiaux. Comme les générateurs qui laissent le vide invariant forment nécessairement un sous-groupe de $SU(3)_L \times SU(3)_R$, une inspection de toutes les possibilités et l'interdiction, imposée par le théorème 1 de briser, ne serait-ce qu'en partie, le sous-groupe vectoriel $SU(3)_V$ ne laisse de place que pour une seule possibilité :

$$Q^a_V|0> = 0\ ,\ \ a = 0, ..., 8\ ,\quad et\ \ Q^a_A|0> \neq 0\ ,\ \ a = 1, ..., 8\ . \tag{4.6}$$

La possibilité de déduire la brisure spontanée de la symétrie chirale en QCD à partir des principes premiers est en soi remarquable, puisqu'il s'agit là d'une propriété non-perturbative de la théorie. Ce résultat ne demande qu'un nombre minimal d'hypothèses "techniques" : la théorie confine la couleur, ce confinement ne modifie pas les identités de Ward de la symétrie chirale, l'angle du vide $\theta_{QCD}$ est nul, et le nombre de saveurs de masse nulle est au moins égal à 3. Cette dernière condition mérite d'être soulignée. Si on considère la limite $m_u, m_d \to 0$ en fixant $m_s$ à sa valeur physique, le lagrangien de QCD exhibe une symétrie chirale $SU(2)_L \times SU(2)_R$, qui devrait être brisée spontanément vers la symétrie d'isospin $SU(2)_V$. Dans le cas de seulement deux saveurs de masse nulle, il n'existe cependant pas de démonstration à partir des principes premiers que cette brisure spontanée de la symétrie chirale a bien lieu (le théorème 1 reste vrai).

Combinés avec le théorème de Goldstone, les deux théorèmes précédents impliquent que le spectre des états liés de QCD contient huit états pseudo-scalaires $|\pi^a(p)>$ de masse nulle, $p^2 = 0$. Ces états saturent la singularité (4.5) exigée par les identités de Ward anormales (4.2) pour les fonctions à trois points, et couplent aux courants axiaux

[6] L'extension de la présente analyse en y incluant la possibilité de baryons exotiques $qqq\bar{q}q$ [30] ou hybrides $qqqg$ ne modifie pas la conclusion.

$A_\mu^a$, $a = 1, ..., 8$. Les relations de commutation (2.40) impliquent que ces bosons de Goldstone forment un octet sous l'action de la symétrie non-brisée $SU(3)_V$,

$$Q_V^a|\pi^b(p)> = if^{abc}|\pi^c(p)> \quad . \tag{4.7}$$

De même, leur couplage aux courants axiaux est décrit par une seule constante, $F_0$, avec

$$< 0|A_\mu^a(x)|\pi^b(p)> = i\delta^{ab}F_0 p_\mu e^{ip\cdot x} \ . \tag{4.8}$$

Les phases des états $|\pi^a(p)>$ peuvent être choisies de manière à ce que $F_0$ soit réelle et positive. La signification physique de la constante $F_0$ est la suivante : elle correspond à la valeur dans la limite chirale de la constante de désintégration $F_\pi$ du pion, qui est mesurée dans le processus $\pi \to \mu\nu$,

$$F_0 = F_\pi|_{m_u,m_d,m_s\to 0} \ , \quad F_\pi = 92.4 \text{ MeV [31]} \ . \tag{4.9}$$

Les états de Goldstone sont identifiés à l'octet des mésons les plus légers $\pi$, $K$, et $\eta$. A un choix de phases près, cette correspondance est donnée par

$$\begin{aligned}
&|\pi^\pm> = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\pi^1> \pm i\,|\pi^2>\right) , \qquad |\pi^0> = |\pi^3> \\
&|K^\pm> = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\pi^4> \pm i\,|\pi^5>\right) , \qquad |K^0> = \frac{-1}{\sqrt{2}}\left(|\pi^6> +i\,|\pi^7>\right) \\
&|\bar{K}^0> = \frac{-1}{\sqrt{2}}\left(|\pi^6> -i\,|\pi^7>\right) , \qquad |\eta> = |\pi^8> \ .
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Bien entendu, les masses de ces mésons pseudo-scalaires ne sont pas nulles, et ce pour une raison bien comprise : dans le monde réel, les quarks $u$, $d$ et $s$ possèdent une masse, qui est petite devant l'échelle $\Lambda_H \sim 1$ GeV à laquelle sont formés les autres états hadroniques, comme les mésons $\rho$ et $\omega$, ou le nucléon $N$, ... Alors que ceux-ci restent massifs dans la limite chirale, les masses des mésons $\pi$, $K$, et $\eta$ tendent vers zéro avec $m_u$, $m_d$, et $m_s$.

La présence des masses des quarks légers se traduit donc par deux conséquences pour le spectre des états hadroniques :

- les bosons de Goldstone acquièrent une petite masse,
- les états d'un même multiplet de $SU(3)_V$ n'ont pas des masses strictement égales.

Ces deux caractéristiques sont, au moins sur le plan qualitatif, en accord avec le spectre hadronique tel qu'il est observé, et tel qu'il a été décrit dans l'introduction.

**Ainsi, les mésons $\pi$, $K$, et $\eta$ sont actuellement les seuls états hadroniques dont l'existence est prédite par QCD !** En fait, les identités de Ward de la symétrie chirale nous donnent même beaucoup plus de renseignements sur ces états. Nous y reviendrons dans les sections suivantes.

## 4.2 Notion de paramètre d'ordre de la symétrie chirale

Avant de nous tourner vers les conséquences phénoménologiques des deux théorèmes qui précèdent, il nous reste encore à définir une notion utile, celle de paramètre d'ordre de la brisure spontanée de la symétrie chirale. Rappelons d'abord que la brisure spontanée d'une symétrie continue est un phénomène qui apparaît dans d'autres contextes de la physique, notamment en physique de la matière condensée, où il est à l'origine de certaines transitions de phase [32]. L'exemple peut-être le mieux connu et le plus étudié concerne les propriétés magnétiques des systèmes de spin. A haute température, ces systèmes sont caractérisés par un état fondamental invariant par rapport aux rotations d'espace. Par contre, en-deçà d'une température critique $T_c$, certains matériaux exhibent un comportement radicalement différent : il apparaît un ordre magnétique à longue portée, qui se manifeste par une forte corrélation entre des spins même très éloignés. Ces corrélations traduisent le fait que l'état fondamental a cessé d'être invariant sous les rotations d'espace. Expérimentalement, cette transition de phase est détectée en suivant l'évolution en fonction de la température de certaines observables physiques convenablement choisies, et appelées *paramètres d'ordre* [32].

Afin de mieux saisir cette notion, considérons un exemple précis. Il est bien connu que dans les systèmes ferromagnétiques, la phase ordonnée à basse température est caractérisée par l'apparition d'une aimantation spontanée $< \vec{M} >$ non nulle, qui traduit un alignement macroscopique de tous les spins du réseau. Par contre, dans la phase désordonnée à haute température, $< \vec{M} > = \vec{0}$. L'opérateur $\vec{M}$ désigne ici la somme (par unité de volume) des spins individuels placés en chaque site du réseau. La valeur moyenne $< \cdots >$ est en général donnée par une somme statistique sur tous les états du système, pondérée par les poids de Boltzmann appropriés. A température nulle, seul l'état fondamental $|0>$, d'énergie minimale, contribue à cette moyenne statistique, et

$$< \vec{M} >_{T=0} = < 0|\vec{M}|0 > \quad . \tag{4.11}$$

Si le système est décrit par un hamiltonien $H$ invariant sous l'action des rotations d'espace, il existe un opérateur moment angulaire total du système, $\vec{L}$, qui commute avec $H$,

$$[\, L_i \,,\, H \,] \;=\; 0 \;\;,\;\; i \;=\; 1,\, 2,\, 3 \;, \tag{4.12}$$

et qui vérifie les relations de commutation de l'algèbre de $SO(3)$,

$$[\, L_i \,,\, L_j \,] \;=\; i\, \epsilon_{ijk}\, L_k \;. \tag{4.13}$$

Par ailleurs, l'aimantation $\vec{M}$ se transforme comme un vecteur sous les rotations,

$$[\, L_i \,,\, M_j \,] \;=\; i\, \epsilon_{ijk}\, M_k \;, \tag{4.14}$$

soit encore

$$M_i = -\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}[L_j, M_k]. \tag{4.15}$$

Il est maintenant aisé de voir en quoi $< \vec{M} >$ est un paramètre d'ordre qui nous indique que le système se trouve dans une phase ordonnée, où l'invariance par rotation est spontanément brisée. En effet,

$$< M_i >_{T=0} = -\frac{i}{2}\epsilon_{ijk} < 0|[L_j, M_k]|0 > . \tag{4.16}$$

Si l'état fondamental $|0>$ est invariant par rotation, il est annihilé par les générateurs $L_i$, et $< M_i >= 0$. Autrement dit, $< M_i >\neq 0$ implique nécessairement $L_i|0 >\neq 0$. Un paramètre d'ordre est donc un "indicateur de brisure spontanée de symétrie". En général, il existe un ensemble infini de paramètres d'ordre. Dans l'exemple précédent, on peut également prendre le tenseur $M_iM_j - \frac{1}{3}\vec{M}^2\delta_{ij}$. La nécessité de soustraire $\frac{1}{3}\vec{M}^2\delta_{ij}$ se comprend aisément : le tenseur $M_iM_j$ ne se transforme pas sous une représentation irréductible du groupe des rotations, mais se compose d'une superposition d'opérateurs de moments angulaires $\ell = 0$ et $\ell = 2$. Une valeur moyenne non nulle pour $< 0|M_iM_j|0 >$ est donc parfaitement compatible, d'après le théorème de Wigner-Eckart, avec un état fondamental $|0>$ invariant sous les rotations (i.e. de moment angulaire $\ell = 0$). Par contre, le tenseur $M_iM_j - \frac{1}{3}\vec{M}^2\delta_{ij}$, symétrique et de trace nulle, se transforme de manière irréductible comme un opérateur de moment angulaire $\ell = 2$. Par conséquent, toujours d'après le théorème de Wigner-Eckart, $< 0|M_iM_j - \frac{1}{3}\vec{M}^2\delta_{ij}|0 >\neq 0$ implique que $|0>$ ne peut pas être un état de moment angulaire nul, et donc que la symétrie de rotation est brisée spontanément.

En d'autres termes, pour un groupe de symétrie continu donné, ne sont des paramètres d'ordre que les valeurs moyennes d'opérateurs qui, sous l'action de ce groupe, se transforment selon une représentation, en général réductible, dont la décomposition en représentations irréductibles ne contient pas la représentation triviale (ou singulet).

Notons également que si une valeur non nulle d'un paramètre d'ordre signale avec certitude une brisure spontanée de symétrie, la réciproque n'est pas vraie. La brisure spontanée d'une symétrie n'implique pas que tous les paramètres d'ordre soient différents de zéro. Les systèmes magnétiques décrits plus haut offrent d'ailleurs un contre-exemple. En effet, certains matériaux, dits anti-ferromagnétiques, exhibent, dans la phase de basse température, un ordre à longue portée où les spins sont anti-parallèles. Bien que l'invariance par rotation soit brisée spontanément, l'aimantation spontanée reste nulle. Celle-ci n'est donc pas un paramètre d'ordre pertinent pour décrire la phase anti-ferromagnétique. L'aptitude d'un paramètre d'ordre à rendre compte d'un phénomène de brisure spontanée de symétrie dépend donc du mécanisme qui en est à l'origine, autrement dit des détails structurels du système. A l'inverse, l'étude expérimentale des paramètres d'ordre peut nous renseigner sur ce mécanisme.

Avant de revenir plus en détail sur ce dernier point dans le contexte de la brisure spontanée de la symétrie chirale en QCD, transcrivons d'abord les notions précédentes dans le langage du groupe $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Les représentations irréductibles de ce groupe sont formées par des couples de représentations irréductibles de $SU(3)$, notés $(n_L, n_R)$, où $n_L$, $n_R$ = 1, 3, 3*, 8, ... correspondent aux représentations singulet, triplet et sa complexe conjuguée, octet, etc. Par exemple, la représentation triviale de $SU(3)_L \times SU(3)_R$ est notée $(1,1)$. Les projections de chiralité gauche $u_L$, $d_L$, $s_L$ des champs de quarks se transforment comme un triplet par rapport à $SU(3)_L$, mais sont invariantes sous l'action de $SU(3)_R$. Elles appartiennent donc à la représentation $(3,1)$. A l'inverse, les projections de chiralité droite $u_R$, $d_R$, $s_R$ se transforment selon la représentation $(1,3)$, alors que les champs $\overline{\psi_L}$ et $\overline{\psi_R}$ se transforment suivant les représentations conjuguées, respectivement $(3^*,1)$ et $(1,3^*)$. A partir de là, il est possible d'exprimer les propriétés de transformations chirales de tout opérateur composite. Les courants, par exemple, appartiennent aux représentations irréductibles $(8,1)$ pour $J^a_{L,\mu}$, et $(1,8)$ pour $J^a_{R,\mu}$. Les courants vectoriels et axiaux se transforment donc suivant une représentation réductible $(8,1) \oplus (1,8)$. Les bilinéaires de quarks comme les densités scalaires $S^a$ et pseudo-scalaires $P^a$ se transforment selon la représentation $(3^*,3) \oplus (3,3^*)$, etc. Les paramètres d'ordre de la symétrie chirale sont les opérateurs qui se transforment suivant une représentation, en général réductible, de $SU(3)_L \times SU(3)_R$, qui ne contient pas la représentation triviale $(1,1)$. De plus, il faut naturellement que les valeurs moyennes dans le vide de ces opérateurs ne soient pas nulles par suite de l'invariance de celui-ci sous les transformations de Lorentz ou de $SU(3)_V$, et sous l'action des symétries discrètes ($\mathcal{P}$, $C$, $T$).

Donnons, pour clore cette discussion, quelques exemples. Le paramètre d'ordre de la symétrie chirale le plus simple est fourni par le condensat de quarks :

$$< \bar{q}q >_0 \equiv < 0|\bar{u}u|0 > = < 0|\bar{d}d|0 > = < 0|\bar{s}s|0 > \ , \tag{4.17}$$

où les égalités reflètent la symétrie $SU(3)_V$ de QCD dans la limite chirale. Le condensat se transforme comme $(3^*,3) \oplus (3,3^*)$. D'autres paramètres d'ordre sont fournis par certaines combinaisons de fonctions de Green des courants vectoriels et axiaux. Par exemple, la fonction à deux points

$$\int d^4x \, e^{iq\cdot x} \ < 0|T\{V^a_\mu(x)V^b_\nu(0) - A^a_\mu(x)A^b_\nu(0)\}|0 > \ , \tag{4.18}$$

qui se transforme comme $(8,8)$, est un paramètre d'ordre pour toutes les valeurs du transfert d'impulsion $q^2$. En particulier, à transfert nul, cette fonction à deux points est reliée à la constante $F_0$ qui décrit les éléments de matrice (4.8) du courant axial entre le vide et les états à un boson de Goldstone :

$$\begin{aligned} F_0^2\delta^{ab} &= \frac{1}{3i}\int d^4x < 0|T\{V_\mu^a(x)V^{b,\mu}(0) - A_\mu^a(x)A^{b,\mu}(0)\}|0 > \\ &= \frac{1}{3i}\int d^4x < 0|T\{(\overline{\psi}_L\gamma_\mu\lambda^a\psi_L)(x)(\overline{\psi}_R\gamma^\mu\lambda^b\psi_R)(0)\}|0 > \ . \end{aligned} \tag{4.19}$$

La seconde expression illustre de quelle façon un paramètre d'ordre comme $F_0$ traduit l'existence de corrélations *à longue portée* ($q = 0$ !) entre quarks de chiralités gauche et droite. Nous rencontrerons d'autres paramètres d'ordre dans la suite du cours. Ce lien avec des paramètres d'ordre constitue une motivation supplémentaire pour étudier les fonctions de Green : elles contiennent des renseignements de nature non perturbative sur la structure chirale du vide de QCD.

Notons cependant qu'il existe également des paramètres d'ordre qui ne sont pas des fonctions de Green des courants $A_\mu^a$, $V_\mu^a$ ou des densités $S^a$ et $P^a$. En guise d'exemples, citons des condensats plus complexes, comme le condensat mixte $< 0|\bar{q}^i\sigma^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^\alpha T_{ij}^\alpha q^j|0 >$, qui fait intervenir à la fois les champs de quarks légers $q = u,\ d,\ s$ et le champ de gluon $G_{\mu\nu}^\alpha$, ou les condensats à quatre quarks, de la forme $< 0|(\bar{q}\Gamma_1 q)(\bar{q}\Gamma_2 q)|0 >$, où les matrices $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ appartiennent à l'ensemble des seize matrices $1$, $\gamma_5$, $\gamma_\mu$, $\sigma_{\mu\nu}$, $\gamma_5\gamma_\mu$. Le condensat mixte se transforme suivant une représentation $(3^*,3)\oplus(3,3^*)$, tout comme le condensat $< \bar{q}q >_0$, puisque le champ de gluon $G_{\mu\nu}^\alpha$ est invariant sous l'action du groupe de saveur chiral $SU(3)_L\times SU(3)_R$.

## 4.3 Propriétés à basse énergie des bosons de Goldstone

Dans les fonctions de Green des courants vectoriels et axiaux, les états intermédiaires qui correspondent à l'échange d'un ou de plusieurs bosons de Goldstone produisent, dans l'espace des impulsions, des singularités, pôles ou points de branchement. Considérons les fonctions à deux points du courant axial. L'invariance de Lorentz, la symétrie $SU(3)_V$ et l'identité de Ward

$$iq^\mu\int d^4x\, e^{iq\cdot x} < 0|T\{A_\mu^a(x)A_\nu^b(0)\}|0 >= 0\ , \tag{4.20}$$

nous permettent de décrire ces fonctions à deux points à l'aide d'une seule fonction $\Pi_A(q^2)$,

$$i\int d^4x\, e^{iq\cdot x} < 0|T\{A_\mu^a(x)A_\nu^b(0)\}|0 >= \delta^{ab}\left(q_\mu q_\nu - q^2\eta_{\mu\nu}\right)\Pi_A(q^2)\ . \tag{4.21}$$

Insérons maintenant des états intermédiaires dans le $T$-produit. Pour ce faire, utilisons le $T$-produit canonique défini en (3.4). Puisque nous nous intéressons aux singularités des fonctions de Green, le choix du $T$-produit n'est pas important. En effet, dans une théorie des champs locale renormalisable, un choix différent du produit chronologique modifie les fonctions de Green au plus par des polynômes (de degrés finis) dans les transferts d'impulsion, qui ne produisent pas de singularités à distance finie. Nous obtenons donc successivement

$$
\begin{aligned}
& i\int d^4x\, e^{iq\cdot x} < 0|T_{can}\{A^a_\mu(x)A^b_\nu(0)\}|0> = \\
& = i\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2|\vec{p}|}\sum_{c=1}^{8}\{\theta(x^0) < 0|A^a_\mu(x)|\pi^c(\vec{p})> < \pi^c(\vec{p})|A^b_\nu(0)|0> + \\
& \qquad + \theta(-x^0) < 0|A^b_\nu(0)|\pi^c(\vec{p})> < \pi^c(\vec{p})|A^a_\mu(x)|0> \} + \cdots \\
& = i\,(2\pi)^3\,\delta^{ab}\,F_0^2\int dx^0\, e^{iq^0x^0}\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2|\vec{p}|}\{\theta(x^0)e^{-i|\vec{p}|x^0}p_\mu p_\nu\,\delta(\vec{p}-\vec{q}) \\
& \qquad +\theta(-x^0)e^{i|\vec{p}|x^0}p_\mu p_\nu\,\delta(\vec{p}+\vec{q})\} + \cdots \\
& \qquad = i\,\delta^{ab}\,F_0^2\int dx^0\, e^{iq^0x^0}\frac{1}{2|\vec{q}|}\{\theta(x^0)e^{-i|\vec{q}|x^0}q'_\mu q'_\nu + \theta(-x^0)e^{i|\vec{q}|x^0}q''_\mu q''_\nu\} + \cdots .
\end{aligned}
$$

Les quadrivecteurs $q'$ et $q''$ dans l'expression ci-dessus sont donnés par

$$
q' = (|\vec{q}|\,,\ \vec{q})\ ,\ \ q'' = (|\vec{q}|\,,\ -\vec{q})\ . \tag{4.22}
$$

Les points de suspension représentent les contributions des états à plusieurs bosons de Goldstone ou des états massifs, qui ne donnent pas lieu à un pôle en $q^2 = 0$. Afin d'exhiber ce dernier, il suffit d'effectuer l'intégration sur $x^0$, à l'aide des formules bien connues

$$
\int dx^0\, e^{i(q^0\mp|\vec{q}|)x^0}\,\theta(\pm x^0) = \frac{\pm i}{(q^0\mp|\vec{q}|)\pm i\epsilon} \tag{4.23}
$$

pour finalement obtenir [7]

$$
i\int d^4x\, e^{iq\cdot x} < 0|T_{cov}\{A^a_\mu(x)A^b_\nu(0)\}|0> = -\,\delta^{ab}\left(q_\mu q_\nu - q^2\eta_{\mu\nu}\right)\frac{F_0^2}{q^2+i\epsilon} + \cdots\ , \tag{4.24}
$$

après avoir absorbé un terme non covariant dans la définition du $T$-produit covariant. Autrement dit,

$$
\Pi_A(q^2) = -\frac{F_0^2}{q^2+i\epsilon} + \overline{\Pi}_A(q^2)\ , \tag{4.25}
$$

[7] Ce résultat n'est (bien évidemment) pas sans rapport avec l'expression (4.19) de $F_0$.

où le terme $\overline{\Pi}_A(q^2)$ est exempt de pôle en $q^2 = 0$, mais possède des coupures produites par les états intermédiaires à trois ou plus bosons de Goldstone, ou des pôles en $q^2 \sim \Lambda_H^2$, produits par les états intermédiaires massifs (des résonances comme $a_1$, par exemple). En d'autres termes, le pôle du boson de Goldstone est la singularité dominante de la fonction à deux points $\Pi_A(q^2)$ au voisinage de $q^2 = 0$.

Des considérations similaires s'appliquent à tout élément de matrice qui reçoit une contribution dûe à l'échange d'un seul boson de Goldstone. Par exemple, l'élément de matrice du courant axial entre le vide et un état à trois bosons de Goldstone s'écrit

$$
\begin{aligned}
&< \pi^{a_1}(p_1)\pi^{a_2}(p_2)\pi^{a_3}(p_3)|A_\mu^{a_4}(0)|0> = \\
&= -\frac{iF_0\, g^{a_1a_2a_3a_4}(p_1,p_2,p_3)}{(p_1+p_2+p_3)^2+i\epsilon}(p_1+p_2+p_3)_\mu \;+\; \bar{R}_\mu^{a_1a_2a_3a_4}(p_1,p_2,p_3)\ .
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Le pôle en $(p_1+p_2+p_3)^2 = 0$ vient de la contribution où un boson de Goldstone est émis par le courant axial, alors que $\bar{R}^{a_1a_2a_3a_4}(p_1,p_2,p_3)$ rassemble toutes les autres contributions, exemptes de pôle en $(p_1+p_2+p_3)^2 = 0$. La conservation du courant axial implique que

$$
(p_1+p_2+p_3)^\mu < \pi^{a_1}(p_1)\pi^{a_2}(p_2)\pi^{a_3}(p_3)|A_\mu^{a_4}(0)|0> = 0\ , \tag{4.27}
$$

soit encore

$$
iF_0 g^{a_1a_2a_3a_4}(p_1,p_2,p_3) - (p_1+p_2+p_3)^\mu \bar{R}_\mu^{a_1a_2a_3a_4}(p_1,p_2,p_3) = 0\ . \tag{4.28}
$$

Puisque $\bar{R}_\mu^{a_1a_2a_3a_4}$ ne possède pas de pôle en $(p_1+p^2+p^3)^2 = 0$, nous en déduisons que

$$
g^{a_1a_2a_3a_4}(0,0,0) = 0\ . \tag{4.29}
$$

D'autre part, rappelons que, par définition, le résidu du pôle, soit

$$
g^{a_1a_2a_3a_4}(p_1,p_2,p_3)|_{(p_1+p_2+p_3)^2=0}\ ,
$$

n'est autre, à une opération de croisement près, que l'amplitude de diffusion entre deux bosons de Goldstone. Le résultat précédent nous apprend donc que cette amplitude s'annule lorsque les impulsions tendent vers zéro : **les bosons de Goldstone interagissent faiblement à basse énergie !** Puisque l'invariance de Lorentz impose à une amplitude de ne dépendre des impulsions qu'au travers de quantités invariantes, par exemple les variables de Mandelstam, qui sont quadratiques dans les impulsions, nous en déduisons que l'amplitude de diffusion élastique de deux bosons de Goldstone tend vers zéro comme le carré de l'énergie dans le centre de masse lorsque celle-ci s'annule. Par récurrence, ce résultat se généralise aux amplitudes de diffusion avec un nombre quelconque de bosons de Goldstone dans les états initiaux et finals.

## 4.4 Effets des masses des quarks : le rôle du condensat

Dans le monde réel, où les masses $m_u$, $m_d$ et $m_s$ des quarks légers sont différentes de zéro, les bosons de Goldstone acquièrent une masse et deviennent les états physiques $\pi$, $K$ et $\eta$. Les singularités des fonctions de Green précédentes sont donc déplacées : les pôles des fonctions à deux points des courants axiaux partiellement conservés sont localisés en $q^2 = M_\pi^2$ ou $q^2 = M_\eta^2$ dans la voie non étrange, ou en $q^2 = M_K^2$ dans la voie étrange (nous négligeons la différence de masse entre les $K$ chargés et les $K$ neutres). De même, les points de branchement produits par les états intermédiaires à plusieurs mésons pseudo-scalaires sont situés en $q^2 = 4M_\pi^2$, $4M_K^2$, $(M_\pi + M_K)^2$, etc.

Les masses des quarks induisent également des brisures explicites de la symétrie $SU(3)_V$ dans les éléments de matrice des courants. Par exemple, pour les courants axiaux chargés non étranges et étranges

$$(\bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 u)(x) = A_\mu^1(x) - iA_\mu^2(x) \ , \ (\bar{s}\gamma_\mu\gamma_5 u)(x) = A_\mu^4(x) - iA_\mu^5(x) \ , \tag{4.30}$$

nous obtenons, au lieu de (4.8),

$$\begin{aligned} <\Omega|(\bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 u)(x)|\pi^+(p)> &= -i\sqrt{2}F_\pi p_\mu e^{ip\cdot x} \ , \\ <\Omega|(\bar{s}\gamma_\mu\gamma_5 u)(x)|K^+(p)> &= -i\sqrt{2}F_K p_\mu e^{ip\cdot x} \ . \end{aligned} \tag{4.31}$$

Les deux constantes $F_\pi$ et $F_K$ tendent vers une valeur commune $F_0$ dans la limite chirale, en accord avec (4.8), mais leurs valeurs physiques sont distinctes : expérimentalement, on obtient $F_K/F_\pi = 1,22$ [33], soit une brisure de $SU(3)_V$ de l'ordre de 20%. Les relations de conservation partielle (2.45) ou (3.11),

$$\partial^\mu(\bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 u)(x) = (m_u + m_d)(\bar{d}i\gamma_5 u)(x) \ , \cdots \tag{4.32}$$

nous fournissent alors les éléments de matrices correspondants pour les densités pseudo-scalaires, par exemple

$$<\Omega|(\bar{d}i\gamma_5 u)(0)|\pi^+(p)> = -\frac{\sqrt{2}F_\pi M_\pi^2}{(m_u + m_d)} \ . \tag{4.33}$$

A partir de l'identité de Ward (3.16), qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} iq^\mu \int d^4x\, e^{iq\cdot x} <\Omega|T_{cov}\{(\bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 u)(x)(\bar{u}i\gamma_5 d)(0)\}|\Omega> &= i<\Omega|\bar{u}u + \bar{d}d|\Omega> + \\ -(m_u + m_d) \int d^4x\, e^{iq\cdot x} <\Omega|T_{cov}\{(\bar{d}i\gamma_5 u)(x)(\bar{u}i\gamma_5 d)(0)\}|\Omega> \ , \end{aligned}$$

on obtient, après avoir séparé la contribution du pôle de pion,

$$iq^\mu \int d^4x\, e^{iq\cdot x} < \Omega | T_{cov}\{(\bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 u)(x)(\bar{u}i\gamma_5 d)(0)\}|\Omega > = \tag{4.34}$$
$$= i < \Omega|\bar{u}u + \bar{d}d|\Omega > - \frac{i}{q^2 - M_\pi^2}\frac{2F_\pi^2 M_\pi^4}{(m_u + m_d)} + O(m_{quark}) \; .$$

Lorsque $q \to 0$, le membre de gauche tend vers zéro, puisqu'il n'y a pas, dans la théorie massive, d'état de masse nulle qui pourrait produire une singularité en $q^2 = 0$. En ne gardant que les termes linéaires dans les masses des quarks (en particulier, $F_\pi = F_0 + O(m_{quark})$ ), on obtient la formule suivante :

$$M_\pi^2 = (m_u + m_d)B_0 + O(m_{quark}^2) \; , \tag{4.35}$$

avec

$$B_0 = -\frac{< 0|\bar{u}u|0 >}{F_0^2} = -\frac{< 0|\bar{d}d|0 >}{F_0^2} = -\frac{< 0|\bar{s}s|0 >}{F_0^2} \; . \tag{4.36}$$

Des formules semblables pour $M_K$ et $M_\eta$ découlent d'une étude similaire des fonctions à deux points des courants axiaux appropriés (nous négligeons ici les effets électromagnétiques et la différence $m_d - m_u$ ; dans ce cas, $m_u = m_d \equiv \widehat{m}$ et $M_{K^+} = M_{K^0} \equiv M_K$ )

$$\begin{aligned} M_K^2 &= (\widehat{m} + m_s)B_0 + O(m_{quark}^2) \; , \\ M_\eta^2 &= \frac{2}{3}(\widehat{m} + 2m_s)B_0 + O(m_{quark}^2) \; . \end{aligned} \tag{4.37}$$

Ces formules sont remarquables dans la mesure où elles relient un effet observable de la *brisure explicite* de la symétrie chirale, les masses des mésons pseudo-scalaires, à une quantité, le condensat $< \bar{q}q >_0$, qui témoigne de la *brisure spontanée* de celle-ci. Insistons cependant sur la présence de corrections $O(m_{quark}^2)$ dans les formules ci-dessus. Pour des masses de quarks infinitésimales, celles-ci sont supprimées par rapport aux contributions linéaires proportionnelles au condensat. Au passage, notons que la remarque précédente implique que le condensat $< \bar{q}q >_0$ est *négatif* (ou nul). Dans le cas contraire, les carrés des masses des mésons pseudo-scalaires seraient négatives pour des masses de quarks très petites, ce qui reviendrait à admettre que le vide $|0>$ de QCD dans la limite chirale devient instable lorsqu'on "branche" les masses des quarks.

Comme dit plus haut, le développement en masses des quarks de $M_\pi^2$, $M_K^2$ n'est, a priori, pas décrit complètement par les seuls termes linéaires en $m_{quark}$. Cependant, il est souvent admis que la brisure spontanée de la symétrie chirale est le résultat d'une forte condensation de paires de quarks-antiquarks dans le vide [34], caractérisée par une valeur du condensat de l'ordre de

$$< \bar{q}q >_0 \sim -(230 \; MeV)^3 \; , \; B_0 \sim \Lambda_H \sim 1 \; GeV \; . \tag{4.38}$$

Sur le plan pratique, cette hypothèse revient à supposer que les corrections dans les formules des masses sont petites (typiquement, de l'ordre de 2% pour $M_\pi^2$ ), soit

$$\frac{2\widehat{m}\,B_0}{M_\pi^2} \sim 1\ ,\quad \frac{(m_s+\widehat{m})\,B_0}{M_K^2} \sim 1\ . \tag{4.39}$$

Autrement dit, le terme linéaire dans les masses des quarks ne serait pas seulement le terme dominant pour des masses de quarks infinitésimales, mais le resterait encore pour les valeurs réelles de celles-ci. Notons que les valeurs des masses de quarks ne nous sont pas connues, ce sont des paramètres libres du Modèle Standard. Une conséquence immédiate dans ce "scénario standard" est une prédiction pour le rapport $m_s/\widehat{m}$ des masses de quarks [35, 36],

$$\frac{m_s}{\widehat{m}} \sim 2\,\frac{M_K^2}{M_\pi^2} - 1 \sim 25\ . \tag{4.40}$$

Plusieurs arguments peuvent être invoqués pour étayer ce scénario standard d'une forte condensation de paires de quarks-antiquarks dans le vide. D'abord, le condensat $<\bar{q}q>_0$ est le plus simple des paramètres d'ordre de la brisure spontanée de la symétrie chirale. Les autres paramètres d'ordre sont soit des condensats plus compliqués (condensat mixte $<\bar{q}(\sigma\cdot G)q>_0$, condensats à quatre quarks $<(\bar{q}\Gamma q)\,(\bar{q}\Gamma q)>_0$, ...) ou alors des fonctions de corrélation à deux points, à trois points ..., par exemple certaines fonctions de Green des courants vectoriels et axiaux. Mais la raison essentielle qui a conduit à privilégier le scénario standard vient du fait que le condensat $<\bar{q}q>_0$ décrit de façon générale, et pas seulement pour les masses des méson pseudo-scalaires, les déviations à la limite chirale pour des masses de quarks *infinitésimales*. Le condensat $<\bar{q}q>_0$ jouerait donc un rôle prépondérant, un peu comme l'aimantation spontanée dans le cas des matériaux ferromagnétiques. Les autres paramètres d'ordre associés au développement par rapport aux masses des quarks ne décriraient que des aspects secondaires du mécanisme de brisure spontanée de la symétrie chirale.

En fait, bien que cette image standard soit tout à fait plausible, elle ne représente pas une nécessité absolue dans l'état actuel de nos connaissances théoriques. Ainsi, il est parfaitement permis d'imaginer un scénario très différent, où le condensat $B_0$ ne jouerait qu'un rôle marginal (tout comme l'aimantation spontanée cesse d'être un paramètre d'ordre pertinent pour décrire une phase anti-ferromgnétique), voire même d'envisager le cas extrême où il serait nul. En effet, les deux théorèmes de la section 4.1, bien que très importants pour établir que la brisure spontanée de la symétrie chirale a bien lieu en QCD, ne nous éclairent cependant pas sur le mécanisme qui en est à l'origine.

Dans le cas d'un condensat très petit,

$$\frac{2\widehat{m}\,B_0}{M_\pi^2} \ll 1\ , \tag{4.41}$$

la contribution dominante aux masses des mésons pseudo-scalaires légers vient du terme quadratique dans les masses des quarks (pour une discussion plus détaillée voir les articles [37, 38, 39] ). Dans le cas général, le rapport $m_s/\widehat{m}$ n'est plus fixé, mais varie dans l'intervalle $6,3 \lesssim m_s/\widehat{m} \lesssim 25$, où la valeur inférieure correspond au cas extrême d'un condensat nul,

$$\frac{m_s}{\widehat{m}} \sim 2\frac{M_K}{M_\pi} - 1 \sim 6,3 \text{ pour } B_0 \sim 0 \; . \tag{4.42}$$

Aucun argument théorique ne permet actuellement de trancher en faveur d'une possibilité au détriment de l'autre. De même, il n'existe actuellement pas la moindre indication expérimentale qui permettrait de rejeter l'une ou l'autre de ces éventualités. Deux raisons au moins permettent de comprendre l'origine de cette situation :

– d'abord, ce n'est qu'au cours de ces dix ou quinze dernières années qu'a été développé un cadre théorique précis, la théorie des perturbations chirales [40, 41, 42], qui permet de relier les données expérimentales sur les processus qui mettent en jeu les mésons pseudo-scalaires $\pi$, $K$ et $\eta$, à des quantités qui décrivent la structure non perturbative du vide de la QCD.

– ensuite, puisque le condensat apparaît toujours multiplié par une masse de quark dans les observables physiques (voir les formules (4.35) et (4.37) ), mesurer ses effets revient, sur le plan expérimental, à mettre en évidence des effets de brisure explicite de la symétrie chirale, ce qui est extrêmement difficile, ces effets étant très petits. Dans la section suivante nous illustrerons ce point dans le cas des déviations aux relations de Goldberger-Treiman, qui sont sensibles à la valeur du condensat ou du rapport $m_s/\widehat{m}$. Nous verrons que les erreurs expérimentales actuelles n'atteignent malheureusement pas la précision requise pour distinguer les diverses alternatives.

# 5 La règle de somme de Dashen-Weinstein pour les déviations aux relations de Goldberger-Treiman

Une situation potentiellement sensible au mécanisme de brisure spontanée de la symétrie chirale a été discutée dans la référence [43], et est reliée à un problème ancien, les déviations aux relations de Goldberger-Treiman [9] (voir l'article [44] pour une revue et une discussion plus récente). Considérons l'élément de matrice du courant axial chargé non étrange entre deux états du nucléon ($q_\mu = (p-p')_\mu$),

$$< P(p')|\bar{u}\gamma_5\gamma_\mu d|N(p) > = \bar{u}_P(p')\left[\gamma_\mu\gamma_5 G_A^{NP}(q^2) + q_\mu\gamma_5 G_B^{NP}(q^2)\right] u_N(p) \; . \tag{5.43}$$

La conservation partielle du courant axial, $\partial^\mu(\bar{u}\gamma_5\gamma_\mu d) = (m_u + m_d)\bar{u}i\gamma_5 d$, conduit, pour

$q^2 = 0$, à la relation

$$(M_N + M_P)G_A^{NP}(0) \; = \; 2F_\pi g_{\pi NN} + (m_u + m_d)H^{NP}(0) \; . \tag{5.44}$$

Dans cette formule, $g_{\pi NN}$ désigne la constante de couplage pion-nucléon, et $H^{NP}(0)$ décrit l'élément de matrice (à transfert d'impulsion nul) de la densité pseudo-scalaire $\bar{u}i\gamma_5 d$, après soustraction du pôle du pion,

$$< P(p')|\bar{u}i\gamma_5 d|N(p) >= \bar{u}_P(p')i\gamma_5 u_N(p)\left[H^{NP}(q^2) + p\hat{o}le\ du\ pion\right] \; . \tag{5.45}$$

Dans la limite chirale, l'équation (5.45) conduit à la relation de Goldberger-Treiman,

$$(M_N + M_P)G_A^{NP}(0) \; = \; 2F_\pi g_{\pi NN} \; , \tag{5.46}$$

et les déviations à celle-ci s'expriment en termes de l'élément de matrice inconnu $H^{NP}(0)$. Numériquement, le membre de gauche de cette relation est égal à 2380 MeV, et si on néglige les déviations à la limmite chirale, le membre de droite vaut de 2430 MeV à 2500 MeV, suivant la valeur de la constante $g_{\pi NN}$ (les valeurs numériques utilisées sont précisées ci-après), soit un accord remarquable. Pour comprendre les déviations au résultat de la limite chirale, il faudrait avoir une estimation phénoménologique solide de la quantité $H^{NP}(0)$, ce qui est loin d'être le cas. Une extension de cette analyse à tout l'octet permet en quelque sorte de contourner ce problème.

De la même façon, considérons donc les éléments de matrice du courant axial étrange entre un nucléon et un hypéron. La même procédure conduit à des relations similaires,

$$\begin{aligned}(M_\Lambda + M_P)G_A^{\Lambda P}(0) \; &= \; -\sqrt{2}F_K g_\Lambda + (m_u + m_s)H^{\Lambda P}(0) \; , \\ (M_N + M_\Sigma)G_A^{N\Sigma}(0) \; &= \; 2F_K g_\Sigma + (m_u + m_s)H^{N\Sigma}(0) \; ,\end{aligned} \tag{5.47}$$

où à la place de la constante de couplage pion-nucléon et de la constante de désintégration du pion $F_\pi$ apparaissent les constantes de couplage kaon-nucléon-hypéron, $g_\Lambda$ et $g_\Sigma$, et la constante de désintégration du kaon $F_K$. Développons ensuite les éléments de matice $H^{NP}(0)$, $H^{\Lambda P}(0)$ et $H^{N\Sigma}(0)$ par rapport aux masses des quarks, $H^{NP}(0) = \overset{o}{H}{}^{NP}(0) + O(m_{quark})$, et utilisons l'invariance sous la symétrie $SU(3)_V$ dans la limite chirale pour obtenir, d'après le théorème de Wigner-Eckart,

$$\begin{aligned}\overset{o}{H}{}^{NP}(0) \; &= \; F + D \\ \overset{o}{H}{}^{\Lambda P}(0) \; &= \; -\sqrt{\frac{3}{2}}\left(F + \frac{1}{3}D\right) \\ \overset{o}{H}{}^{N\Sigma}(0) \; &= \; -F + D \; .\end{aligned} \tag{5.48}$$

Les équations (7.11) et (7.33) nous fournissent ainsi trois relations pour les deux éléments de matrice réduits inconnus $F$ et $D$. Leur élimination conduit à la règle de somme de Dashen-Weinstein [45] (les quantités $\Gamma_\Lambda$ et $\Gamma_\Sigma$ sont définies dans [43]),

$$\frac{\sqrt{3}}{2} g_\Lambda + \frac{1}{2} g_\Sigma = 3\Gamma_\Lambda + \Gamma_\Sigma + \frac{F_\pi g_{\pi NN} - M_N G_A^{NP}(0)}{2F_K} \cdot \frac{m_s + \widehat{m}}{\widehat{m}} + O(m^2_{quark}) \,. \qquad (5.49)$$

Cette règle de somme relie le rapport $m_s/\widehat{m}$ à des quantités expérimentales. Les constantes de couplage hypéroniques $g_\Lambda$ et $g_\Sigma$ peuvent être extraites des données sur la diffusion kaon-nucléon. Ces analyses ne fournissent qu'une borne supérieure sur $g_\Sigma$ [46] ($|g_\Sigma| < 7$), de sorte que l'équation (5.49) ne permet d'obtenir qu'une borne supérieure sur $m_s/\widehat{m}$. Celle-ci est particulièrement sensible à la valeur de la constante de couplage pion-nucléon $g_{\pi NN}$, comme le montre la table ci-dessous :

| $g_{\pi NN}$ | $(m_s/\widehat{m})_{max}$ |
|---|---|
| $13,55 \pm 0,14$ [47] | $10 \pm 5$ |
| $13,40 \pm 0,08$ [48] | $13 \pm 6$ |
| $13,23 \pm 0,12$ [49] | $20 \pm 12$ |
| $13,14 \pm 0,07$ [50] | $28 \pm 12$ |

Nous avons utilisé $F_\pi = (92,4 \pm 0,2)$ MeV , $G_A^{NP}(0) = 1,2670 \pm 0,0028$ [31] et, pour les autres quantités, les valeurs données dans l'article [43] ont été quelque peu ré-actualisées [31]. Une confirmation de la valeur élevée de $g_{\pi NN}$ obtenue dans la référence [47] permettrait d'ores et déjà d'exclure une valeur $m_s/\widehat{m} \sim 25$ telle que l'exige un grand condensat. Par contre, pour des valeurs plus petites de $g_{\pi NN}$, toutes les possibilités restent permises. Pour des valeurs de $g_{\pi NN}$ encore plus petites que celles qui figurent dans la table ci-dessus, par exemple $g_{\pi NN} = 12,71 \pm 0,16$ [51], l'équation (35) ne contraint plus $m_s/\widehat{m}$ en pratique.

Les valeurs centrales de $(m_s/\widehat{m})_{max}$ déduites de la règle de somme (35) dépendent également des autres données expérimentales, en particulier les valeurs des constantes $g_\Lambda$ et $g_\Sigma$. Par exemple, si la borne sur $|g_\Sigma|$ se voyait réduite d'un facteur deux, les valeurs de $(m_s/\widehat{m})_{max}$ diminueraient de plusieurs unités, et le cas standard ne serait compatible qu'avec des valeurs plus faibles de $g_{\pi NN}$. La détermination expérimentale des constantes $g_\Lambda$ et $g_\Sigma$ est indirecte [46] : elle demande une extrapolation dans la région non-physique des amplitudes de diffusion $KN$ ou $\bar{K}N$. Cette extrapolation est un problème délicat, que la présence en-deçà du seuil de résonances hypéroniques rend encore plus difficile (pour une discussion plus élaborée, voir les articles cités dans la référence [43]). Des données plus précises sur la diffusion $KN$ ou $\bar{K}N$, qui pourront être obtenues auprès de FINUDA à DA$\Phi$NE [52], contribueraient à une meilleure détermination des constantes $g_\Lambda$ et $g_\Sigma$. En principe, celles-ci peuvent également s'obtenir à partir de données suffisamment précises sur la photo-production d'étrangeté associée. Cependant, les problèmes évoqués ci-dessus deviennent encore plus aigus : distance plus grande entre le seuil de la réaction et le pôle du nucléon, présence de plusieurs résonances baryoniques en-deçà du seuil, etc...

Récemment, des valeurs de $g_\Lambda$ et de $g_\Sigma$ ont également été obtenues [53] à partir des données sur la production de paires hypéroniques $Y\overline{Y}$ dans des collisions proton-antiproton au repos obtenues a LEAR. Là aussi, l'analyse est loin d'être facile, et les valeurs obtenues dans [53] sont très vraisemblablement entachées d'erreurs systématiques importantes et difficiles à estimer. Si, pour les besoins de l'exercise, on utilise les valeurs correspondantes, $g_\Lambda = 13,7 \pm 0,4$, $g_\Sigma = 3,9 \pm 0,7$, dans l'équation (5.49), les valeurs obtenues pour le rapport $m_s/\widehat{m}$ varient de $6,4\pm 2,8$ pour $g_{\pi NN} = 13,55\pm 0,14$ à $17,9\pm 9,2$ pour $g_{\pi NN} = 13,14 \pm 0,07$.

Il apparaît donc clairement qu'une détermination expérimentale **précise et fiable** des constantes de couplage $g_{\pi NN}$, $g_\Lambda$ et $g_\Sigma$ représente certainement un enjeu important dans le contexte de la règle de somme de Dashen-Weinstein. Sur le plan théorique, une évaluation des corrections $O(m^2_{quark})$ dans l'équation (5.49) est indispensable pour s'assurer que la relation entre ces quantités expérimentales et le rapport des masses de quarks $m_s/\widehat{m}$ est sous contrôle.

# 6 Conclusions

La Chromodynamique Quantique avec trois saveurs de quarks légers possède une symétrie chirale $SU(3)_L \times SU(3)_R$ qui est nécessairement brisée spontanément. Cette propriété non-perturbative du vide de QCD implique l'existence d'un octet de mésons pseudo-scalaires légers, $\pi$, $K$ et $\eta$, qui interagissent faiblement à basse énergie.

Les processus où interviennent ces mésons pseudo-scalaires peuvent être étudiés dans le cadre d'un développement systématique par rapport à l'énergie et par rapport aux masses des quarks, $m_u$, $m_d$ et $m_s$ (la théorie des perturbations chirales), qui tient compte de toutes les contraintes imposées par les identités de Ward chirales.

Ce développement chiral introduit des paramètres, ou constantes de basse énergie, qui sont des paramètres d'ordre de la brisure spontanée de la symétrie chirale. Ces constantes de basse énergie peuvent également être reliées au comportement à petits transferts d'impulsion de fonctions de corrélation de QCD, ce qui rend leur évaluation possible, en principe, par des méthodes non-perturbatives (réseaux, règles de somme de QCD, ...).

A l'inverse, certaines données expérimentales à basse énergie, si elles sont suffisamment précises, peuvent nous apporter, par une détermination phénoménologique de ces constantes de basse énergie, des renseignements sur la structure chirale du vide de QCD. En particulier, elles sont susceptibles de confirmer ou d'infirmer l'image standard, qui attribue la brisure spontanée de la symétrie chirale à une forte condensation de paires de quarks-antiquarks dans le vide.

Les processus qui, à l'ordre dominant du développement chiral, sont sensibles aux effets de brisure explicite de la symétrie chirale par les masses des quarks légers, sont particulièrement intéressants, puisqu'ils font intervenir le condensat $< \bar{q}q >_0$, plus précisément les rapports $2\widehat{m} < \bar{q}q >_0 / F_\pi^2 M_\pi^2$ ou $m_s/\widehat{m}$. Des exemples de tels processus sont donnés par les diffusions $\pi - \pi$ et $\pi - K$ à basse énergie, la désintégration $\eta \to 3\pi$, ... Pour une discussion détaillée dans le cas de la diffusion pion-pion, voir les articles [54] et [55].

Le manque de précision des données expérimentales actuellement disponibles suscite un intérêt particulier pour plusieurs expériences en cours de réalisation :

- la possibilité, pour KLOE à DAΦNE, d'effectuer une nouvelle expérience $K_{\ell 4}$ [56], qui pourrait conduire à une détermination des déphasages pion-pion à basse énergie avec un gain de précision considérable ; dans ce contexte, les résultats d'une expérience $K_{\ell 4}$ récente effectuée à BNL [57] sont également d'un intérêt particulier ;

- la mesure, avec une précision de 10%, du temps de vie des atomes $\pi^+ - \pi^-$ par l'expérience DIRAC au CERN [58] ;

- la possibilité, pour FINUDA à DAΦNE, d'effectuer des expériences de diffusion $KN$ et $\bar{K}N$ [56] à grande statistique, susceptibles d'améliorer les évaluations des constantes $g_\Lambda$ et $g_\Sigma$. Enfin, il serait certainement très utile d'arriver à une meilleure détermination de la constante $g_{\pi NN}$.

Les applications de la théorie des perturbations chirales sont beaucoup plus nombreuses que celles auzquelles nous avons dû nous limiter ici. Des revues plus détaillées de ce point de vue [59] constituent un complément utile à ce cours.

# References


[1] S. L. Adler et R. F. Dashen, *Current Algebras and Applications to Particle Physics*, W. A. Benjamin Inc., 1968.
B. Renner, *Current Algebras and their Applications*, Pergamon Press, 1968.

[2] De Alfaro, Fubini, Furlan et Rossetti, *Currents in Hadron Physics*, North Holland Publishing Company, 1973.

[3] S. B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino et E. Witten, *Current Algebra and Anomalies*, World Scientific, 1985.

[4] H. Fritzsch, M. Gell-Mann et H. Leutwyler, Phys. Lett. B47 (1973) 365.

[5] R. E. Marshak, Riazuddin et C. P. Ryan, *Theory of Weak Interactions in Particle Physics*, John Wiley and Sons, 1969.

[6] M. Gell-Mann, Caltech Preprint, 1961, reproduit dans [7].
Y. Ne'eman, Nucl. Phys. 26 (1961) 222.

[7] M. Gell-Mann et Y. Ne'eman, *The Eightfold Way*, W. A. Benjamin Inc., 1964.

[8] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. 4 (1960) 380.

[9] M. L. Goldberger et S. B. Treiman, Phys. Rev. 111 (1958) 354.

[10] M. Gell-Mann, Phys. Lett. 8 (1964) 214.
G. Zweig, rapport CERN 8182/TH401 (1964).

[11] N. F. Ramsey, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 40 (1990) 1.

[12] R. Jackiw, *Topological Investigations of Quantized Gauge Theories*, dans [3].

[13] R. Peccei, dans *CP Violation*, édité par C. Jarlskog, World Scientific, 1989.

[14] S. Coleman, J. Math. Phys. 7 (1966) 787.
E. Fabri et L. Picasso, Phys. Rev. Lett. 16 (1966) 408.
J. A. Swieca, Phys. Rev. Lett. 17 (1966) 974.

[15] J. Goldstone, Nuovo Cim. 19 (1961) 154.
J. Goldstone, A. Salam et S. Weinberg, Phys. Rev. 127 (1962) 965.

[16] G. S. Guralnik, C. R. Hagen et T. W. B. Kibble, dans *Advances in Particle Physics*, édité par R. L. Cool et R. E. Marshak, Interscience, 1968. J. A. Swieca, dans *Cargèse Lectures in Physics*, vol. 4, édité par D. Kastler, Gordon and Breach, 1970.

[17] K. Symanzik, Comm. Math. Phys. 16 (1970) 48. Pour plus de détails sur ces questions de comportements à courtes distances des courants, on pourra également consulter J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1984.

[18] M. Gell-Mann, Physics 1 (1964) 63; Phys. Rev. 125 (1962) 1067.

[19] J. Schwinger, Phys. Rev. Lett. 3 (1959) 296.

[20] D. J. Gross et R. Jackiw, Nucl. Phys. B14 (1969) 269. Voir également la fin de la section 5-1-7 dans C. Itzykson et J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Inc, 1980.

[21] J. S. Bell et R. Jackiw, Nuovo Cim. 60A (1969) 47.

[22] S. L. Adler, Phys. Rev. 177 (1969) 2426.
J. Schwinger, Phys. Rev. 82 (1951) 664.

[23] W. A. Bardeen, Phys. Rev. 184 (1969) 1848.

[24] S. L. Adler et W. A. Bardeen, Phys. Rev. 182 (1969) 1517.
S. L. Adler, dans *1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics* vol. 1, édité par S. Deser, M. Grisaru et H. Pendleton, MIT Press, 1970.

[25] J. Wess et B. Zumino, Phys. Lett. 37B (1971) 95.

[26] C. Vafa et E. Witten, Nucl. Phys. B 234 (1984) 173; Comm. Math. Phys. 95 (1984) 257.

[27] G. 't Hooft, dans : "Recent Developements in Gauge Theories", edité par G. 't Hooft et al., Plenum, New York (1980).

[28] S. Coleman et B. Grossman, Nucl. Phys. B 203 (1982) 205 ;
Y. Frishman, A. Schwimmer, T. Banks et S. Yankielowicz, Nucl. Phys. B 177 (1981) 157.

[29] R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. J. Olive et J. C. Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix*, Cambridge University Press, 1966.

[30] G. R. Farrar, Phys. Lett B96 (1980) 273.

[31] C. Caso et al., "Review of Particle Properties", Eur. J. Phys. C3 (1998) 1.

[32] N. Boccara, "Symétries brisées", Hermann (1976) ;
P. W. Anderson, "Basic Notions in Condensed Matter Physics", The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. (1984) ;
J. C. Tolédano et P. Tolédano, "The Landau Theory of Phase Transitions", World Scientific (1987).

[33] H. Leutwyler et M. Roos, Z. Phys. C25 (1984) 91.

[34] M. Gell-Mann, R. J. Oakes et B. Renner, Phys. Rev. 175 (1968) 2195.

[35] S. Weinberg, dans : "A Festschrift for I. I. Rabi", édité par L. Motz, New York Academy of Sciences (1977) 185.

[36] J. Gasser et H. Leutwyler, Phys. Rep. 87 (1982) 77.

[37] N. H. Fuchs, H. Sazdjian et J. Stern, Phys. Lett. B269 (1991) 183.

[38] J. Stern, H. Sazdjian et N. H. Fuchs, Phys. Rev. D47 (1993) 3814.

[39] M. Knecht et J. Stern, "Generalized Chiral Perturbation Theory", dans [56] ;
M. Knecht, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) B 39 (1995) 249.

[40] S. Weinberg, Physica A 96 (1979) 327.

[41] J. Gasser et H. Leutwyler, Phys. Lett. B125 (1983) 321, 325 ; Ann. Phys. 158 (1984) 142.

[42] J. Gasser et H. Leutwyler, Nucl. Phys. B250 (1985) 465.

[43] N. H. Fuchs, H. Sazdjian et J. Stern, Phys. Lett. B238 (1990) 380.

[44] C. A. Dominguez, Riv. Nuovo Cim. 8 (1985) 1.

[45] R. Dashen et M. Weinstein, Phys. Rev. 188 (1969) 2330.

[46] G. K. Atkin, B. Di Claudio, G. Violini et N. M. Queen, Phys. Lett. B95 (1980) 447.
A. D. Martin, Nucl. Phys. B179 (1981) 33.
J. Antolin, Phys. Rev. D35 (1987) 122; Phys. Rev. D43 (1991) 1532; J. Math. Phys. 31 (1990) 791.

[47] T. O. E. Ericson et al., Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 1046.

[48] R. Koch et E. Pietarinen, Nucl. Phys. A336 (1980) 331.

[49] F. G. Markopoulo-Kalamara et D. V. Bugg, Phys. Lett. B318 (1993) 565.

[50] R. Arndt et al., Phys. Rev. C49 (1994) 2729.

[51] F. Bradamante et al., Phys. Lett. B343 (1995) 431.

[52] P. M. Gensini, "Low Energy Kaon-Nucleon Interactions and Scattering at DAΦNE", dans [56].

[53] R.G.E. Timmermans et al., Phys. Lett. B257 (1991) 227; Nucl. Phys. A585 (1995) 143c.

[54] J. Stern, H. Sazdjian and N.H. Fuchs, Phys. Rev. **D47** (1993) 3814 ;
M. Knecht, B. Moussallam, J. Stern, et N. H. Fuchs, Nucl. Phys. B457 (1995) 513 ;
M. Knecht, B. Moussallam, J. Stern, et N. H. Fuchs, Nucl. Phys. B471 (1996) 445.

[55] J. Stern, dans Proceedings of the *Workshop on Physics and Detectors for DaΦne '95*, R. Baldini, F. Bossi, G. Capon and G. Pancheri Eds., Frascati Physics Series vol. IV, INFN-LNF SIS-Ufficio Pubblicazioni, 1995, et hep-ph/9510318;
M.R. Pennington, dans *DAPHCE Workshop on Hadron Dynamics with the New DaΦne and TJNAF Facilities*, Frascati (1996), Nucl. Phys. **A 623** (1997) 189c;
H. Leutwyler, dans *DAPHCE Workshop on Hadron Dynamics with the New DaΦne and TJNAF Facilities*, Frascati (1996), Nucl. Phys. **A 623** (1997) 169c.

[56] "The Second DAΦNE Physics Handbook", édité par L. Maiani, G. Pancheri et N. Paver, publication INFN-LNF (1995).

[57] Voir, par exemple, la contribution de J. Lowe dans *Chiral Dynamics: Theory and Experiment*, eds. A.M Bernstein, D. Drechsel and T. Walcher, Springer-Verlag, 1998, Lecture Notes in Physics 513, p. 375.

[58] B. Adeva et al., pré-tirage CERN/SPSLC 95-1, décembre 1994.

[59] H. Leutwyler, dans *Proceedings of the XXVIth Conference on High Energy Physics*, Dallas, Am. Inst. Phys., 1993 (édité par J. R. Sanford).
H. Leutwyler, dans *Proceedings of the Hadron94 Workshop*, Granado (Brésil), 1994 ; hep-ph/9406283.
U.-G. Meißner, Rep. Prog. Phys. 56 (1993) 903.
M. Knecht and J. Stern, Generalized Chiral perturbation Theory, dans [56].
V. Bernard, N. Kaiser et U.-G. Meißner, Int. J. Mod. Phys. E4 (1995) 193.
G. Ecker, Prog. Part. Nucl. Phys. 35 (1995) 1.
J. Stern, "Two alternatives of spontaneous chiral symmetry breaking in QCD", preprint IPNO-TH-97-41, et hep-ph/9801282.
J. Stern, "Light Quark masses and Condensates in QCD", dans *Chiral Dynamics:*

*Theory and Experiment*, eds. A.M Bernstein. D. Drechsel and T. Walcher, Springer-Verlag, 1998, Lecture Notes in Physics 513.